Die Anfangsgrün... der Differential rechnung und Integralrechn...

Richard Schröder

Math. 3009.05.9

SCIENCE CENTER LIBRARY

FROM THE BEQUEST OF

HORACE APPLETON HAVEN,

OF PORTSMOUTH, N. H.

(Class of 1842.)

Digitized by Google

DIE ANFANGSGRÜNDE DER DIFFERENTIALRECHNUNG UND INTEGRALRECHNUNG.

FÜR SCHÜLER VON HÖHEREN LEHRANSTALTEN
UND FACHSCHULEN SOWIE ZUM SELBSTUNTERRICHT

DARGESTELLT VON

DR. RICHARD SCHRÖDER,
DIREKTOR DER OBERREALSCHULE ZU GROSS-LICHTERFELDE.

MIT ZAHLREICHEN ÜBUNGSBEISPIELEN
UND 27 FIGUREN IM TEXT.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1905.

Digitized by Google

Math 3009.05.9

HARVARD COLLEGE
JUN 6 1911
LIBRARY.
Haven Fund

ALLE RECHTE EINSCHLIESSLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN.

Digitized by Google

Vorwort.

Dieses Büchlein ist nicht als Parteischrift in dem Streite entstanden, der jetzt unter den deutschen Mathematikern über die Frage geführt wird, ob die Elemente der höheren Analysis in den Schulunterricht eingeführt werden sollen oder nicht. Ich habe an diesem Streite mit keinem Worte mich beteiligt, aber die in den preußischen Lehrplänen von 1901 gelassene Freiheit benutzt, um mit unseren Primanern nach der analytischen Geometrie der Ebene und nach der niederen Analysis die Elemente der höheren durchzunehmen. Aus der Praxis dieses Unterrichtes ist das Buch erwachsen. Da die Erfolge bei uns günstige waren, hoffe ich, den Herren Kollegen mit der Veröffentlichung vielleicht nützen zu können.

Dem didaktischen Zwecke gemäß habe ich sehr viele Beispiele gegeben. Die 111 Aufgaben zum Differenzieren sind nach ihrer Schwierigkeit geordnet und mit den Resultaten versehen. Da bei den ersten 78 Aufgaben auch der zweite Differentialquotient abgeleitet ist, so dürften diese 189 Übungen auch zum Selbstunterricht ausreichen. Bei der Lehre von den vieldeutigen Symbolen und von den größten und kleinsten Werten genügen wenige Beispiele, da die Methode stets dieselbe bleibt. Dagegen sind die Kurven ausführlicher behandelt; sie erregen das höchste Interesse der Schüler.

Daß trotz einfacher Darstellung überall die wissenschaftliche Strenge gewahrt ist, auch in den Definitionen der Symbole $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$, wird man hoffentlich billigen. Hierbei wie bei der Revision der Rechnungen und Resultate hat mein Kollege, Herr Oberlehrer Dr. Weiß, in hingebendster Weise geholfen, wofür ich ihm auch an dieser Stelle meinen herzlichsten Dank ausspreche.

Digitized by Google

Das Schlußkapitel — die Anwendung der Analysis auf die Mechanik — habe ich nach Rücksprache mit Physikern und um so lieber aufgenommen, weil dabei auch der zweite Differentialquotient einen realen Inhalt gewinnt. Hier bin ich meinem Kollegen, Herrn Oberlehrer Dr. Leick, zu großem Danke verpflichtet, der meine ursprünglich zu knappe Darstellung erweitert und vertieft, auch die ersten vier Übungsbeispiele geliefert hat.

Allen Herren, die mich auf Mängel aufmerksam machen, werde ich aufrichtig dankbar sein.

An Schulen, welche die Elemente der analytischen Geometrie und der niederen Analysis lehren, dürfte die Durchnahme des Gebotenen nicht nur keine Schwierigkeit bereiten, sondern vielmehr für die Lösung zahlreicher Aufgaben eine wesentliche Erleichterung und Zeitersparnis bringen.

Möchte es dem Büchlein gelingen, unserer königlichen Wissenschaft neue Jünger zuzuführen! Ohne ernste geistige Anstrengung ist freilich nichts zu erreichen; ich bin jedoch der Meinung, daß wir Lehrer zwar zu den Knaben hinabsteigen, die Jünglinge aber zu uns emporziehen sollen!

Kufstein, im Juli 1905.

Dr. **R. Schröder.**

Digitized by Google

Inhaltsverzeichnis.

Erster Teil.

Differentialrechnung.

Erstes Kapitel.

Begriff und Eigenschaften des Differentialquotienten.

Seite

§ 1. Vorbegriffe 1
§ 2. Geometrische Bedeutung des Differentialquotienten 7
§ 3. Differentiation der einfachen algebraischen Funktionen . . . 9
§ 4. Differentiation der einfachen transzendenten Funktionen . . 14
§ 5. Differentiation der Funktionen von Funktionen 19
§ 6. Mehrmalige Differentiation 21
§ 7. Differentiation impliziter Funktionen 23
§ 8. Übungen 24

Zweites Kapitel.

Anwendung der Differentialrechnung zur Bestimmung der vieldeutigen Symbole.

§ 9. Die Form $\frac{0}{0}$ 40
§ 10. Die Form $\infty - \infty$ 42
§ 11. Die Form $\frac{\infty}{\infty}$ 44
§ 12. Die Form $0.\infty$ 46
§ 13. Die Form 0^0 47
§ 14. Die Form ∞^0 49
§ 15. Die Form 1^∞ 50

Drittes Kapitel.

Anwendung der Differentialrechnung zur Bestimmung der Maxima und Minima.

§ 16. Geometrische Vorbegriffe 52
§ 17. Beispiele 55

Digitized by Google

Viertes Kapitel.

Anwendung der Differentialrechnung zur Untersuchung von ebenen Kurven.

Seite

§ 18. Die Gleichung der Tangente 62
§ 19. Die Gleichung der Normale 63
§ 20. Subtangente, Länge der Tangente. Subnormale, Länge der Normale 63
§ 21. Der Krümmungskreis. Inflexionspunkte 65
§ 22. Die Evolute 69
§ 23. Darstellung der Formeln in Polarkoordinaten 70
§ 24. Der Kreis 74
§ 25. Die gemeine oder Apollonische Parabel 75
§ 26. Die Ellipse 76
§ 27. Die Hyperbel 78
§ 28. Die semikubische oder Neilsche Parabel 79
§ 29. Die Cissoide des Diokles 80
§ 30. Die gemeine Cykloide 81
§ 31. Die Lemniskate 82
§ 32. Die Kardioide 83

Zweiter Teil.

Integralrechnung.

Fünftes Kapitel.

Begriff des Integrals. Integrationsmethoden.

§ 33. Zusammenhang zwischen Differential- und Integral-Funktion 86
§ 34. Grundformeln 88
§ 35. Integration einer mit einem konstanten Faktor behafteten Funktion 90
§ 36. Integration von Summen und Differenzen 91
§ 37. Die sogenannte partielle Integration 92
§ 38. Integration durch Einführung neuer Veränderlicher 93
§ 39. Unbestimmte und bestimmte Integrale 94

Sechstes Kapitel.

Anwendung der Integralrechnung zur Quadratur krummlinig begrenzter ebener Flächen.

§ 40. Quadraturen in rechtwinkligen Koordinaten 96
§ 41. Quadraturen in Polarkoordinaten 97
§ 42. Quadratur der gemeinen Parabel 99
§ 43. Quadratur des Kreises 99
§ 44. Quadratur der Ellipse 100
§ 45. Quadratur der Hyperbel 101
§ 46. Quadratur der Cissoide des Diokles 102
§ 47. Quadratur der gemeinen Cykloide 104
§ 48. Quadratur der Kardioide 106
§ 49. Quadratur der Lemniskate 107

Digitized by Google

Siebentes Kapitel.

Anwendung der Integralrechnung zur Rektifikation ebener Kurven.

Seite

§ 50. Rektifikation in rechtwinkligen Koordinaten 108
§ 51. Rektifikation in Polarkoordinaten 110
§ 52. Rektifikation der gemeinen Parabel 111
§ 53. Rektifikation der Cissoide des Diokles 112
§ 54. Rektifikation der gemeinen Cykloide 114
§ 55. Rektifikation der Kardioide 115

Achtes Kapitel.

Anwendung der höheren Analysis auf die Mechanik.

§ 56. Erklärungen 117
§ 57. Geschwindigkeit 117
§ 58. Beschleunigung 119
§ 59. Übungen 120

Digitized by Google

Erster Teil.

Differentialrechnung.

Erstes Kapitel.

Begriff und Eigenschaften des Differentialquotienten.

§ 1.

Vorbegriffe.

1. In einer Gleichung, z. B. $ax^3 + bxy + cz^3 + d = 0$, unterscheidet man solche Größen, die unveränderlich sind, von solchen, denen verschiedene Werte beigelegt werden können. Die ersteren heißen „konstante Größen“ oder „Konstanten“ und werden mit den ersten Buchstaben des Alphabets $a, b \ldots$ $\alpha, \beta \ldots$ bezeichnet; die letzteren heißen „veränderliche oder variable Größen“ und werden mit den letzten Buchstaben $x, y \ldots \varphi, \psi \ldots$ bezeichnet. Auch die Buchstaben r und ϑ werden häufig für variable Größen gebraucht.

2. Sind in einer Gleichung zwei Variable, z. B. x und y, und beliebig viele Konstanten enthalten, und gibt man der einen Variablen einen bestimmten Wert, so wird auch die andere Variable einen oder mehrere bestimmte Werte erhalten. Der Wert der einen hängt also von dem Wert der anderen Variablen ab; man sagt: die eine Variable ist eine „Funktion“ der anderen. Welche Variable man als unabhängig ansieht, ist gleichgültig; meistens wird x als die unabhängige, y als die abhängige Variable betrachtet.

Digitized by Google

3. Hat man die Gleichung nach der abhängigen Variablen aufgelöst, so heißt diese eine explizite Funktion der anderen Variablen; ist diese Auflösung nicht bewirkt, so heißt die Funktion implizit. — *Beispiele:* Die Funktion

$$ax^2 + by^2 - c = 0 \tag{1}$$

ist zunächst implizit; betrachtet man x als die unabhängige, y als die abhängige Variable, so folgt aus (1) die explizite Funktion

$$y = \sqrt{\frac{c - ax^2}{b}}; \tag{2}$$

soll y unabhängig, x abhängig sein, so folgt die explizite Funktion

$$x = \sqrt{\frac{c - by^2}{a}}. \tag{3}$$

Dagegen kann man die implizite Funktion

$$ax^7 + bxy^3 - cy^5 = 0 \tag{4}$$

in keiner Weise auf die explizite Form bringen.

Wir werden uns zumeist mit expliziten Funktionen beschäftigen.

Eine Funktion kann auch mehr als zwei Variable enthalten, jedoch kommen für uns solche Funktionen nicht in Betracht.

4. Werden in einer Funktion mit den Variablen nur die Operationen des Addierens, Subtrahierens, Multiplizierens, Dividierens, Potenzierens, Radizierens vorgenommen, so heißt sie eine algebraische Funktion; tritt aber eine Variable im Exponenten einer Potenz oder einer Wurzel, oder unter dem Zeichen log, sin, cos, tg, cot, arcsin, arccos, arctg, arccot auf, so heißt die Funktion transzendent. *Beispiele:* Die Funktion $y = \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{2a - x}}$ ist eine algebraische, während $y = a + b \sin x$ eine transzendente Funktion ist.

5. Weiß man, daß y eine Funktion von x ist, ohne daß man die spezielle Form dieser Funktion kennt, so drückt man dieses Abhängigkeitsverhältnis allgemein aus, indem man

Digitized by Google

schreibt: $y = F(x)$, oder $y = f(x)$, oder $y = \varphi(x)$ oder dergleichen.

6. Um sich eine Vorstellung der Werte zu verschaffen, welche y annimmt, während x sich ändert, kann man zwei Wege einschlagen.

a) Tabellarische Darstellung. Man stellt eine Tabelle her, in welcher untereinander die Werte von x, daneben die zugehörigen Werte von y stehen. Das bekannteste Beispiel hierfür bieten die Logarithmentafeln, in welchen der Verlauf der Funktion $y = \log x$

x	$y = \log x$
1	0
2	0,30103 ...
3	0,47712 ...
⋮	⋮

in dieser Weise tabellarisch dargestellt ist.

b) Graphische Darstellung. Man benutzt die Hilfsmittel der analytischen Geometrie, von denen für uns das rechtwinklige Koordinatensystem und das Polarkoordinatensystem ausreichen.

α) Das rechtwinklige Koordinatensystem (Fig. 1). Durch einen Punkt O, den Koordinatenanfang, zieht man horizontal die Gerade $XO-X$, welche X-Achse oder Abszissenachse heißt, und vertikal die Gerade $YO-Y$, welche Y-Achse oder Ordinatenachse heißt. Soll nun die Funktion $y = f(x)$ dargestellt werden, so gibt man der unabhängigen Variablen x zunächst z. B. den Wert Null und berechnet aus der Gleichung $y = f(x)$ den zugehörigen Wert von y; diesen trägt man von O aus auf der Y-Achse ab, und zwar nach oben, wenn er positiv ist, nach unten, wenn er negativ ist. Man erhält dadurch einen Punkt P. Nun gibt man dem x

Digitized by Google

irgendeinen anderen Wert, z. B. a, und berechnet aus der Gleichung $y = f(x)$ den zugehörigen Wert von y; er sei b.

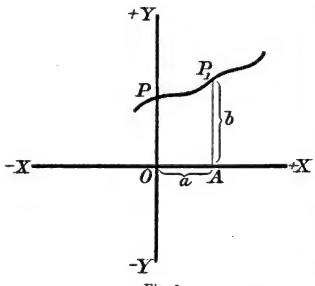


Fig. 1.

Den Wert von x trägt man von O aus auf der X-Achse ab, und zwar nach rechts, wenn er positiv ist, nach links, wenn er negativ ist. Es sei $x = a = OA$. Dann errichtet man in A auf der X-Achse das Lot und schneidet auf demselben von A aus eine Strecke gleich b ab, und zwar nach oben, wenn b positiv ist, nach unten, wenn b negativ ist. Hierdurch erhält man den Punkt P_1. Denkt man sich, daß dem x alle möglichen Werte beigelegt und jedesmal in der beschriebenen Weise die zugehörigen Werte von y konstruiert seien, so werden die Punkte $P, P_1 \ldots$ eine Kurve bilden, welche uns ein Bild von dem Verlauf der Funktion $y = f(x)$ verschafft.

β) Das Polarkoordinatensystem (Fig. 2). Man zieht vom Koordinatenanfang O — dem Pol — aus nach rechts die horizontale Gerade OA, die Achse. Soll nun die Funktion $r = f(\vartheta)$ dargestellt werden, in welcher ϑ einen Winkel und r eine Strecke bedeutet, so gibt man dem Winkel ϑ zunächst z. B. den Wert Null und berechnet aus der Gleichung $r = f(\vartheta)$ den zugehörigen Wert von r, der stets absolut genommen wird; diesen trägt man von O aus auf der Achse ab und erhält dadurch den Punkt P. Nun gibt man dem ϑ einen beliebigen Wert, z. B. α, trägt den Winkel α in O an OA nach oben an und macht den freien Schenkel gleich demjenigen Werte von r, welcher aus der Gleichung

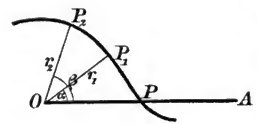


Fig. 2.

Digitized by Google

$r = f(\vartheta)$ für $\vartheta = \alpha$ sich ergibt; er sei r_1. Hierdurch erhält man den Punkt P_1. Setzt man $\vartheta = \beta$ und findet aus der Gleichung $r = f(\vartheta)$, daß für diesen Wert von ϑ $r = r_2$ wird, so trägt man an OA in O den Winkel β nach oben an und macht seinen freien Schenkel gleich r_2: so erhält man den Punkt P_2. Denkt man sich, daß dem ϑ alle möglichen Werte beigelegt und in der beschriebenen Weise die zugehörigen Werte von r konstruiert seien, so werden die Punkte $P, P_1, P_2 \ldots$ in ihrer Aufeinanderfolge ein Bild der Funktion $r = f(\vartheta)$ darstellen.

7. Wenn bei dieser graphischen Darstellung einer Funktion die Punkte $P, P_1, P_2 \ldots$ ununterbrochen aufeinander folgen, während man dem x alle möglichen Werte nacheinander beilegt, so heißt die Funktion stetig oder kontinuierlich. Es kann aber der Fall eintreten, daß die Punkte $P, P_1, P_2 \ldots$ zwar für eine gewisse Reihe von Abszissen kontinuierlich aufeinander folgen, daß dagegen für einen oder mehrere Werte von x eine Unterbrechung oder ein Sprung stattfindet. In diesem Fall heißt die Funktion an dieser Stelle unstetig oder diskontinuierlich. *Beispiel:* Die Funktion

$$y = (x-3)\sqrt{(x-2)\,(x-4)}$$

ist für alle Werte von x, die kleiner als 2 sind, stetig, ebenso für alle Werte von x, die größer als 4 sind; dagegen wird für Werte von x, die zwar größer als 2, aber kleiner als 4 sind, der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen negativ, also wird für diese Werte y imaginär; die Kurve ist also hier unterbrochen. Dazwischen hat sie allerdings einen reellen Punkt, nämlich für $x = 3$ ist $y = 0$.

Wir werden uns hier hauptsächlich mit stetigen Funktionen beschäftigen.

8. Gibt man in der Funktion $y = \frac{1}{x}$ der Variablen x immer größere Werte, so wird y immer kleiner, y strebt bei unendlich wachsendem x der Grenze Null zu. Man drückt dies durch die Gleichung aus: $\operatorname{Lim}_{x=\infty} \frac{1}{x} = 0$, lies: „Limes von $\frac{1}{x}$

Digitized by Google

für $x = \infty$ ist Null". („Limes" heißt lateinisch „Grenze".) Demnach wird z. B. $\lim\limits_{x=\infty}\left(a + \frac{b}{x}\right) = a$ sein. — Läßt man dagegen in der Gleichung $y = \frac{1}{x}\,x$ immer kleiner werden, so wird y immer größer, y strebt bei unendlich abnehmendem x der Grenze Unendlich zu, und wir können schreiben

$$\lim_{x=0} \frac{1}{x} = \infty.$$

Aufgabe: Welchem Grenzwert strebt der Bruch $\frac{\sin\varphi}{\varphi}$ zu, wenn φ sich immer mehr der Null nähert?

Lösung: Aus der Fig. 3 folgen unmittelbar die drei Gleichungen:

$$\text{Dreieck } MBC = \frac{1}{2}\,\overline{MB}\cdot\overline{BC} = \frac{1}{2}\,r^2 \operatorname{tg}\varphi,$$

$$\text{Dreieck } MAD = \frac{1}{2}\,\overline{AM}\cdot\overline{AD} = \frac{1}{2}\,r^2 \sin\varphi\cos\varphi,$$

$$\text{Sektor } MBD = r^2\pi\cdot\frac{\varphi}{2\pi} = \frac{1}{2}\,r^2\cdot\varphi.$$

Nun ist

$$\text{Dreieck } MBC > \text{Sektor } MBD > \text{Dreieck } MAD$$

oder

$$\frac{1}{2}\,r^2 \operatorname{tg}\varphi > \frac{1}{2}\,r^2\varphi > \frac{1}{2}\,r^2 \sin\varphi\cos\varphi,$$

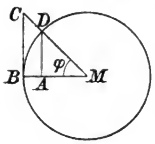


Fig. 3.

also

$$\operatorname{tg}\varphi > \varphi > \sin\varphi\cos\varphi,$$

also

$$\frac{1}{\operatorname{tg}\varphi} < \frac{1}{\varphi} < \frac{1}{\sin\varphi\cos\varphi},$$

also nach Multiplikation mit $\sin\varphi$

$$\cos\varphi < \frac{\sin\varphi}{\varphi} < \frac{1}{\cos\varphi}.$$

Da nun bekanntlich $\lim\limits_{\varphi=0}\cos\varphi = 1$ ist, so ist für $\varphi = 0$

$$1 < \frac{\sin\varphi}{\varphi} < 1,$$

d. h. der Bruch $\frac{\sin\varphi}{\varphi}$ strebt dem Wert 1 zu, wenn φ der Null zustrebt. Mithin ist

$$\lim_{\varphi=0} \frac{\sin\varphi}{\varphi} = 1.$$

Digitized by Google

9. Hat man zwei Werte von x, x_1 und x_2, und bildet man ihre Differenz $x_2 - x_1$, so soll dieselbe der Kürze halber mit Δx, lies: „Delta x", bezeichnet werden. Δx ist also nicht etwa ein Produkt aus Δ und x, sondern nur ein abkürzendes Symbol, an dessen Stelle man sich stets die Differenz $x_2 - x_1$ zu denken hat. Analog ist $\Delta y = y_2 - y_1$, $\Delta r = r_2 - r_1$, $\Delta \varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ usw. Hierbei soll Δx stets eine, wenn auch vielleicht sehr kleine, so doch endliche Größe bedeuten.

10. Wir können jetzt den unter Nr. 7 aufgestellten Begriff der „stetigen" Funktion auch folgendermaßen definieren. Läßt man in der Funktion $y = f(x)$ die unabhängige Variable x um die Größe Δx wachsen, so wird die abhängige Variable y um Δy wachsen. Wir lassen nun Δx immer kleiner werden und der Grenze Null zustreben. Wenn dann auch Δy immer kleiner wird und gleichzeitig mit Δx verschwindet, so heißt die Funktion stetig.

Bei stetigen Funktionen können wir also, wenn y oder u oder v Funktionen von x sind, stets auch Δy, Δu, Δv gleich Null setzen, sobald wir mit Δx zur Grenze Null übergehen.

11. Aus der Algebra wird als bekannt vorausgesetzt:

1. der binomische Lehrsatz

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} \cdot b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots,$$

2. der Satz: Die Summe der unendlichen Reihe

$$\lim_{n=\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots$$

ist gleich e, wobei $e = 2{,}7182818\ldots$ die Basis des natürlichen Logarithmensystems bedeutet.

§ 2.

Geometrische Bedeutung des Differentialquotienten.

Wenn in Fig. 4 BD ein Teil der durch die stetige Funktion $y = f(x)$ dargestellten Kurve ist, die wir kurzweg auch als „die Kurve $y = f(x)$" bezeichnen wollen, so wollen wir

Digitized by Google

uns die Aufgabe stellen, im Punkte B an diese Kurve die Tangente zu ziehen. Zur Lösung dieser Aufgabe genügt es, den Winkel α zu kennen, den die gesuchte Tangente mit der X-Achse oder mit der zur X-Achse durch den Punkt B gezogenen Parallelen BE bildet. Um diesen Winkel zu bestimmen, stellen wir folgende Betrachtung an. Dem Werte $x = OA$ entspricht der Wert $y = f(x) = AB$. Lassen wir x um $AC = \Delta x$ wachsen,

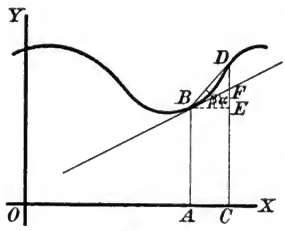


Fig. 4.

so entspricht dem Werte $x + \Delta x = OC$ der Wert

$$y + \Delta y = CD = f(x + \Delta x).$$

Verbinden wir nun B mit D, so ist

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{DE}{BE} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{DC - EC}{BE} = \frac{DC - AB}{AC} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Nehmen wir $AC = \Delta x$ sehr klein, so ist, da die Funktion stetig sein soll, auch $DE = \Delta y$ sehr klein, der Punkt D rückt an den Punkt B heran, die Sehne BD fällt fast mit der Tangente BF zusammen, der Winkel β wird fast gleich dem Winkel α. Für den Grenzfall, daß $\Delta x = 0$ wird, haben wir also

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{Lim}_{\Delta x = 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \operatorname{Lim} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Man ist übereingekommen, hierfür der Kürze halber zu schreiben $\frac{dy}{dx}$. Es ist also

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{Lim}_{\Delta x = 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \operatorname{Lim} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx},$$

wobei also dy und dx nicht etwa Produkte aus d und y oder aus d und x sind, sondern $\frac{dy}{dx}$ nur ein abkürzendes Symbol ist. Der Wert $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, der ein Differenzenquotient ist, solange Δx und Δy endliche Werte haben, führt nun als Grenzwert $\frac{dy}{dx}$

Digitized by Google

die Bezeichnung „Differentialquotient“. Wir haben also den Lehrsatz gewonnen: „Bildet die an eine Kurve $y = f(x)$ gezogene Tangente mit der X-Achse den Winkel α, so ist der Differentialquotient $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\alpha$.“

Würden wir in dem Ausdruck $\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ ohne weiteres $\Delta x = 0$ setzen, so würde er die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ annehmen. Führen wir aber im Einzelfall, wo die Funktion $f(x)$ uns bekannt ist, die angedeuteten Operationen wie in den unten folgenden Beispielen erst durch und setzen dann $\Delta x = 0$, so werden wir den wahren Wert ermitteln, dem der Ausdruck zustrebt. Dieser wird wieder eine gewisse Funktion von x sein, die man allgemein mit $f'(x)$ bezeichnet, so daß also

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{Lim}_{\Delta x = 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

ist. Im Gegensatz zur ursprünglichen Funktion $f(x)$ nennt man den Differentialquotienten die „abgeleitete oder derivierte Funktion“. Der Differentialquotient deutet die vorzunehmenden Rechnungsoperationen nur an, während die derivierte Funktion das fertige Resultat angibt, ähnlich wie es in der Gleichung $\sqrt{4} = \pm 2$ geschieht.

Wie $y = f(x)$, so schreibt man kurz auch $y' = f'(x)$.

§ 3.

Differentiation der einfachen algebraischen Funktionen.

1. Differentiation einer Konstanten.

Wenn die Funktion $y = f(x)$ für jeden Wert von x denselben konstanten Wert, z. B. a, behält, so ist auch

$$f(x+\Delta x) = a,$$

also

$$f(x+\Delta x) - f(x) = a - a = 0,$$

also

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{Lim}_{\Delta x = 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = 0.$$

Digitized by Google

Der Differentialquotient einer Konstanten ist gleich Null.

$$\frac{d(a)}{dx} = 0.$$

2. Differentiation der Funktion $y = f(x) = x$.

Lassen wir x um den kleinen, aber noch endlichen Wert Δx wachsen, so wächst y um den kleinen, aber noch endlichen Wert Δy. Wir erhalten also

$$y + \Delta y = x + \Delta x,$$

oder, da $y = x$ sein soll,

$$\Delta y = \Delta x, \quad \text{also} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1.$$

Dieser Wert kann sich nicht mehr ändern, auch beim Übergang zur Grenze $\Delta x = 0$ nicht; mithin ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(x)}{dx} = 1.$$

3. Differentiation der Funktion $y = ax$.

Wie oben ist

$$y + \Delta y = a(x + \Delta x) = ax + a\Delta x,$$

also, da $y = ax$ ist,

$$\Delta y = a\Delta x, \quad \text{oder} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = a,$$

und beim Übergang zur Grenze $\Delta x = 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(ax)}{dx} = a.$$

4. Differentiation einer Summe $y = u + v + z + \cdots$, worin $u, v, z \ldots$ Funktionen von x sind.

Wie oben ist

$$y + \Delta y = (u + \Delta u) + (v + \Delta v) + (z + \Delta z) + \cdots,$$

also, da $y = u + v + z + \cdots$ ist,

$$\Delta y = \Delta u + \Delta v + \Delta z + \cdots,$$

Digitized by Google

also

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta z}{\Delta x} + \cdots,$$

und beim Übergang zur Grenze

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(u+v+z+\cdots)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} + \frac{dz}{dx} + \cdots$$

Regel: Eine Summe differenziert man, indem man die einzelnen Posten differenziert und ihre Differentialquotienten addiert.

Beispiel: $y = a + bx$; $\frac{dy}{dx} = \frac{da}{dx} + \frac{d(bx)}{dx} = 0 + b = b$.

5. Differentiation einer Differenz $y = u - v$, worin u und v Funktionen von x sind.

Es ist

$$y + \Delta y = u + \Delta u - (v + \Delta v) = u - v + \Delta u - \Delta v,$$

also, da $y = u - v$ ist,

$$\Delta y = \Delta u - \Delta v,$$

also

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} - \frac{\Delta v}{\Delta x},$$

und beim Übergang zur Grenze

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(u-v)}{dx} = \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx}.$$

Regel: Eine Differenz differenziert man, indem man den Differentialquotienten des Subtrahendus von dem Differentialquotienten des Minuendus abzieht.

Beispiel: $y = c - Gx$; $\frac{dy}{dx} = \frac{dc}{dx} - \frac{d(Gx)}{dx} = 0 - G = -G$.

6. Differentiation eines Produktes $y = u \cdot v$, worin u und v Funktionen von x sind.

Es ist

$$y + \Delta y = (u + \Delta u) \cdot (v + \Delta v)$$

oder

$$y + \Delta y = uv + v\Delta u + u\Delta v + \Delta u \cdot \Delta v,$$

Digitized by Google

also, da $y = u \cdot v$ ist,

$$\Delta y = v\Delta u + u\Delta v + \Delta u \cdot \Delta v,$$

also

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = v \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \Delta v.$$

Der letzte Posten der rechten Seite verschwindet, wenn wir mit Δx zur Grenze Null übergehen, weil dann nach § 1 Nr. 10 auch $\Delta v = 0$ wird. Wir erhalten also

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(u \cdot v)}{dx} = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx}.$$

Regel: Ein Produkt differenziert man, indem man den ersten Faktor mit dem Differentialquotienten des zweiten Faktors, und den zweiten Faktor mit dem Differentialquotienten des ersten Faktors multipliziert und die erhaltenen Produkte addiert.

Beispiel: $y = (a + bx)(c + gx)$;

$$\frac{dy}{dx} = (a + bx) \cdot \frac{d(c + gx)}{dx} + (c + gx) \cdot \frac{d(a + bx)}{dx}$$
$$= (a + bx)g + (c + gx)b,$$

also

$$\frac{dy}{dx} = ag + bc + 2bgx.$$

7. Differentiation eines Quotienten $y = \frac{u}{v}$, worin u und v Funktionen von x sind.

Es ist

$$y + \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v},$$

also, da $y = \frac{u}{v}$ ist,

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{uv + v\Delta u - uv - u\Delta v}{v^2 + v\Delta v} = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v^2 + v\Delta v},$$

oder

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2 + v\Delta v}.$$

Digitized by Google

Der letzte Posten des Nenners verschwindet, wenn wir mit Δx zur Grenze Null übergehen, weil dann auch $\Delta v = 0$ wird. Wir erhalten daher

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}.$$

Regel: Einen Quotienten differenziert man, indem man den Nenner mit dem Differentialquotienten des Zählers, den Zähler mit dem Differentialquotienten des Nenners multipliziert, das letzte Produkt vom ersten abzieht und diese Differenz durch das Quadrat des Nenners dividiert.

Beispiel: $y = \frac{ax+b}{c+gx}$;

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(c+gx)\frac{d(ax+b)}{dx} - (ax+b)\cdot\frac{d(c+gx)}{dx}}{(c+gx)^2}$$

$$= \frac{(c+gx)a - (ax+b)g}{(c+gx)^2} = \frac{ac-bg}{(c+gx)^2}.$$

8. Differentiation einer Potenz $y = x^m$.

Es ist

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^m,$$

also nach dem binomischen Lehrsatz

$$y + \Delta y = x^m + mx^{m-1}\cdot\Delta x + \binom{m}{2}x^{m-2}\cdot(\Delta x)^2 + \binom{m}{3}x^{m-3}(\Delta x)^3 + \cdots,$$

also, da $y = x^m$ ist,

$$\Delta y = mx^{m-1}\cdot\Delta x + \binom{m}{2}x^{m-2}\cdot(\Delta x)^2 + \binom{m}{3}x^{m-3}\cdot(\Delta x)^3 + \cdots,$$

also

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = mx^{m-1} + \binom{m}{2}x^{m-2}\cdot\Delta x + \binom{m}{3}x^{m-3}\cdot(\Delta x)^2 + \cdots$$

Beim Übergang zur Grenze $\Delta x = 0$ verschwinden auf der rechten Seite alle mit dem Faktor Δx behafteten Glieder, mithin ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(x^m)}{dx} = mx^{m-1}.$$

Digitized by Google

Beispiel: $y = ax^5 + bx^3 - cx^2 + gx - e;$

$$\frac{dy}{dx} = 5ax^4 + 3bx^2 - 2cx + g.$$

9. Differentiation einer Wurzel $y = \sqrt[n]{x}$.

Es ist

$$y = x^{\frac{1}{n}},$$

also nach (8)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{n} \sqrt[n]{x^{1-n}} = \frac{1}{n} \sqrt[n]{x^{-(n-1)}} = \frac{1}{n} \sqrt[n]{\frac{1}{x^{n-1}}},$$

also

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(\sqrt[n]{x})}{dx} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}.$$

Beispiel: $y = \sqrt[4]{x}$; $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}.$

§ 4.

Differentiation der einfachen transzendenten Funktionen.

1. Differentiation des Logarithmus $y = \log x$.

Es ist

$$y + \Delta y = \log(x + \Delta x)$$

oder, da $y = \log x$ ist,

$$\Delta y = \log(x + \Delta x) - \log x = \log\left(\frac{x + \Delta x}{x}\right)$$

oder

$$\Delta y = \log\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right),$$

also

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}.$$

Setzen wir

$$\Delta x = \frac{x}{m},$$

so erhalten wir

Digitized by Google

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log\left(1+\frac{1}{m}\right)}{\frac{x}{m}} = \frac{m}{x}\log\left(1+\frac{1}{m}\right)$$

oder

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x}\cdot\log\left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right].$$

Gehen wir nun mit Δx zur Grenze Null über, so muß wegen $\Delta x = \frac{x}{m}$ m zur Grenze Unendlich übergehen. Aus der Algebra ist bekannt, daß

$$\operatorname*{Lim}_{m=\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = e$$

ist, wo $e = 2{,}7182818\ldots$ die Basis des natürlichen Logarithmensystems bedeutet. Wir erhalten daher

$$\underline{\frac{dy}{dx} = \frac{d(\log x)}{dx} = \frac{1}{x}\log e.}$$

Beispiel: $y = 3x^2 + 2\log x;\ -\frac{dy}{dx} = 6x + \frac{2}{x}\log e.$

Handelt es sich um die natürlichen (Neperschen) Logarithmen, so ist $le = 1$, also

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(lx)}{dx} = \frac{1}{x}.$$

Beispiel: $y = 4 + 5x + 3lx;\ -\frac{dy}{dx} = 5 + \frac{3}{x}.$

2. Differentiation der Exponentialgröße: $y = a^x$.

Wir logarithmieren nach dem natürlichen System und erhalten

$$ly = x\cdot la.$$

Also ist auch

(1) $$\frac{d(ly)}{dy} = \frac{d(x\cdot la)}{dy}.$$

Wir betrachten zuerst die linke Seite; nach (1) ist $\frac{d(ly)}{dy} = \frac{1}{y}$. Auf der rechten Seite ist la ein konstanter Faktor, wir können daher nach § 3, 3 schreiben

$$d(x\cdot la) = la\cdot dx.$$

Digitized by Google

Setzen wir diese Werte in Gleichung (1) ein, so finden wir

$$\frac{1}{y} = la \cdot \frac{dx}{dy}, \text{ also } \frac{dy}{dx} = y \cdot la,$$

und wenn wir nun wieder einsetzen $y = a^x$, so ergibt sich

$$\underline{\frac{dy}{dx} = \frac{d(a^x)}{dx} = a^x la.}$$

Beispiel: $y = 2x^2 + 3^x$; $-\frac{dy}{dx} = 4x + 3^x l3$.

Handelt es sich um eine Exponentialgröße mit der Basis $e = 2{,}71828\ldots$, so ist $le = 1$, also

$$\underline{\frac{dy}{dx} = \frac{d(e^x)}{dx} = e^x.}$$

3. Differentiation des Sinus: $y = \sin x$.

Es ist

$$y + \Delta y = \sin(x + \Delta x),$$

also

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x;$$

mit Hilfe der bekannten Formel

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},$$

wird hieraus

$$\Delta y = 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right),$$

also identisch

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}.$$

Nach § 1 Nr. 8 ist aber $\operatorname{Lim}_{\varphi=0} \frac{\sin\varphi}{\varphi} = 1$. Gehen wir also mit Δx zur Grenze 0 über, so erhalten wir

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\sin x}{dx} = \cos x.$$

Beispiel: $y = 3x^2 + 4\sin x$; $-\frac{dy}{dx} = 6x + 4\cos x$.

Digitized by Google

4. Differentiation des Kosinus: $y = \cos x$.

Es ist

$$y + \Delta y = \cos(x + \Delta x); \quad \text{also} \quad \Delta y = \cos(x + \Delta x) - \cos x.$$

Mit Hilfe der bekannten Formel

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

erhalten wir

$$\Delta y = -2\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)$$

oder

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\left(\frac{\Delta x}{2}\right)},$$

also beim Übergang zur Grenze $\Delta x = 0$

$$\underline{\frac{dy}{dx} = \frac{d\cos x}{dx} = -\sin x.}$$

Beispiel: $y = 3e^x + 2\sin x + 3\cos x$;

$$\frac{dy}{dx} = 3e^x + 2\cos x - 3\sin x.$$

5. Differentiation des Tangens: $y = \operatorname{tg} x$.

Es ist $y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Den Quotienten $\frac{\sin x}{\cos x}$ können wir nach § 3, 7 folgendermaßen differenzieren

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x\cdot\frac{d\sin x}{dx} - \sin x\cdot\frac{d\cos x}{dx}}{\cos^2 x}$$

und hieraus entsteht mit Hilfe der vorigen Nummer

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Also ist

$$\underline{\frac{dy}{dx} = \frac{d\operatorname{tg} x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}.}$$

Beispiel: $y = 2\sqrt{x}\cdot\sin x - x^2\cos x + 2\operatorname{tg} x$;

$$\frac{dy}{dx} = 2\left(\sqrt{x}\cdot\cos x + \frac{\sin x}{2\sqrt{x}}\right) - (-x^2\sin x + \cos x\cdot 2x)$$
$$+ \frac{2}{\cos^2 x} = 2\sqrt{x}\cos x + \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + x^2\sin x - 2x\cos x + \frac{2}{\cos^2 x}.$$

Digitized by Google

6. Differentiation des Kotangens: $y = \cot x$.

Da $y = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ ist, so folgt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x \frac{d\cos x}{dx} - \cos x \frac{d\sin x}{dx}}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Also ist

$$\underline{\frac{dy}{dx} = \frac{d\cot x}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x}}.$$

Beispiel: $y = \sin x \cdot \operatorname{tg} x + \cos x \cdot \cot x$;

$$\frac{dy}{dx} = \sin x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} + \operatorname{tg} x \cdot \cos x - \cos x \cdot \frac{1}{\sin^2 x} - \cot x \cdot \sin x$$

$$= \frac{\operatorname{tg} x}{\cos x} + \sin x - \frac{\cot x}{\sin x} - \cos x.$$

7. Differentiation des Arcsinus: $y = \arcsin x$.

Die Gleichung (1) $y = \arcsin x$ besagt nichts anderes, als daß (2) $x = \sin y$ ist. Also ist nach Nr. 3 dieses Paragraphen

$$\frac{dx}{dy} = \cos y \quad \text{oder (3)} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y}.$$

Nun folgt aus Gleichung (2) $\cos y = \sqrt{1 - x^2}$, also ist

$$\underline{\frac{dy}{dx} = \frac{d\arcsin x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}.$$

Beispiel: $y = x^2 \cdot \arcsin x$; $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}} + 2x \arcsin x.$

8. Differentiation des Arccosinus: $y = \arccos x$.

Wenn (1) $y = \arccos x$ ist, so ist umgekehrt (2) $x = \cos y$, also $\frac{dx}{dy} = -\sin y$, also $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin y}$. Aus Gleichung (2) folgt $\sin y = \sqrt{1 - x^2}$, also ist

$$\underline{\frac{dy}{dx} = \frac{d\arccos x}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}.$$

Beispiel: $y = 2\arcsin x + \arccos x$;

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{\sqrt{1 - x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Digitized by Google

9. Differentiation des Arctangens: $y = \operatorname{arctg} x$.

Wenn (1) $y = \operatorname{arctg} x$ ist, so ist (2) $x = \operatorname{tg} y$, also

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cos^2 y}, \text{ also (3) } \frac{dy}{dx} = \cos^2 y.$$

Nun ist identisch

$$\cos^2 y = \frac{\cos^2 y}{\cos^2 y + \sin^2 y} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y}.$$

Aus Gleichung (2) folgt aber $\operatorname{tg}^2 y = x^2$, also ist

$$\underline{\frac{dy}{dx} = \frac{d \operatorname{arctg} x}{dx} = \frac{1}{1+x^2}}.$$

Beispiel: $y = 2(1 + x^2) \cdot \operatorname{arctg} x$;

$$\frac{dy}{dx} = 2\left\{\frac{1+x^2}{1+x^2} + \operatorname{arctg} x \cdot 2x\right\} = 2 + 4x \operatorname{arctg} x.$$

10. Differentiation des Arccotangens: $y = \operatorname{arccot} x$.

Wenn (1) $y = \operatorname{arccot} x$ ist, so ist (2) $x = \cot y$, also

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{1}{\sin^2 y}, \text{ also } \frac{dy}{dx} = -\sin^2 y.$$

Nun ist identisch

$$\sin^2 y = \frac{\sin^2 y}{\sin^2 y + \cos^2 y} = \frac{1}{1 + \cot^2 y};$$

ferner folgt aus Gleichung (2) $\cot^2 y = x^2$. Also ist

$$\underline{\frac{dy}{dx} = \frac{d \operatorname{arccotg} x}{dx} = -\frac{1}{1+x^2}}.$$

Beispiel: $y = \operatorname{arctg} x - \operatorname{arccot} x$;

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^2} = \frac{2}{1+x^2}.$$

§ 5.

Differentiation der Funktionen von Funktionen.

Bisher haben wir nur gelernt, einfache Funktionen sowie Summen, Differenzen, Produkte, Quotienten von einfachen Funktionen zu differenzieren. Wir wissen z. B., daß, wenn

Digitized by Google

$y = a + bx^n$ ist, $\frac{dy}{dx} = nbx^{n-1}$ ist. In der Praxis treten aber sehr häufig Funktionen von Funktionen auf, z. B. $y = (a + bx^n)^p$, worin die Klammer eine Funktion von x, und y wieder eine Funktion dieser Funktion von x ist, nämlich ihre p^{te} Potenz. Wie in solchen Fällen zu verfahren ist, lehrt folgende Betrachtung.

Es sei $y = f[\varphi(x)]$; wir setzen $\varphi(x) = z$ und haben dann $y = f(z)$, also

$$y + \Delta y = f(z + \Delta z), \quad \text{also} \quad \Delta y = f(z + \Delta z) - f(z),$$

also

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta x} = \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} \cdot \frac{\Delta z}{\Delta x},$$

oder

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta z} \cdot \frac{\Delta z}{\Delta x},$$

also beim Übergange zur Grenze

$$\underline{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}}.$$

In obigem Beispiel $y = (a + bx^n)^p$ ist demgemäß zu setzen

$$(1) \quad z = (a + bx^n), \qquad (2) \quad y = z^p.$$

Aus (1) folgt

$$\frac{dz}{dx} = n \cdot bx^{n-1},$$

aus (2) folgt

$$\frac{dy}{dz} = p \cdot z^{p-1}.$$

Also ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d[(a+bx^n)^p]}{dx} = n \cdot b \cdot x^{n-1} \cdot p \cdot z^{p-1},$$

oder, wenn nun für z wieder sein Wert $a + bx^n$ gesetzt wird:

$$\frac{dy}{dx} = n \cdot b \cdot p \cdot x^{n-1} \cdot (a + bx^n)^{p-1}.$$

Ein anderes Beispiel ist $y = e^{\operatorname{arctg} x}$. Wir setzen

$$(1) \quad z = \operatorname{arctg} x, \qquad (2) \quad y = e^z.$$

Aus (1) folgt $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$, aus (2) folgt $\frac{dy}{dz} = e^z$.

Digitized by Google

Mithin ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(e^{\operatorname{arctg} x})}{dx} = \frac{e^z}{1+x^2} = \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}.$$

Bei einiger Übung wird man bald ohne Einführung von z zum Ziele gelangen.

§ 6.

Mehrmalige Differentiation.

Wenn wir durch Differentiation aus der Funktion $f(x)$ die derivierte Funktion $f'(x)$ erhalten haben, so wird diese ebenfalls eine Funktion von x sein. Wir können sie also abermals differenzieren und erhalten dadurch die zweite derivierte Funktion $f''(x)$. Man nennt $f''(x)$ auch „den zweiten Differentialquotienten der Funktion $f(x)$, genommen nach x", und gebraucht dafür die symbolische Bezeichnung $\frac{d^2y}{dx^2}$. Eigentlich müßte er mit $\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}$ bezeichnet werden; hierin ist

$$dy = \operatorname{Lim}_{\Delta x = 0} [f(x + \Delta x) - f(x)],$$

also ist dy eine Funktion von x. Dagegen ist dx keine Funktion von x, sondern nur ein unendlich kleiner Zuwachs zu x. Also ist $\frac{1}{dx}$ in bezug auf die Differentiation als ein konstanter Faktor zu betrachten.

Demnach ist $\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{1}{dx} \cdot \frac{d\,dy}{dx}$ und, wenn der Kürze halber d^2y statt $d\,dy$ geschrieben wird, so müßte eigentlich die Bezeichnung für den zweiten Differentialquotienten sein $\frac{d^2y}{(dx)^2}$, da im Nenner in der Tat das Quadrat von dx steht. Der Kürze halber hat man dafür die Bezeichnung $\frac{d^2y}{dx^2}$ gewählt.*

* Diese Rechnung mit symbolischen Ausdrücken soll keine mathematische Ableitung, sondern nur eine Erklärung sein, wie man auf das Symbol $\frac{d^2y}{dx^2}$ gekommen ist.

Digitized by Google

Auch der zweite Differentialquotient ist eine Funktion von x, kann als solche nochmals differenziert werden und liefert dann gemäß der Gleichung

$$\frac{d\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)}{dx} = \frac{df''(x)}{dx} = \frac{d^3y}{dx^3} = f'''(x)$$

den dritten Differentialquotienten usf.

Beispiel: $y = ax^m$; $\quad \frac{dy}{dx} = max^{m-1}$;

$$\frac{d^2y}{dx^2} = m\cdot(m-1)ax^{m-2}; \cdots \frac{d^ny}{dx^n} = m\cdot(m-1)(m-2)\cdots (m-n+1)ax^{m-n}.$$

Wie wir nun den ersten Differentialquotienten

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) \quad \text{als} \quad \operatorname{Lim}_{\Delta x=0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

dargestellt haben, so können wir in analoger Weise auch den zweiten und die folgenden Differentialquotienten ausdrücken. Wir führen dies für $\frac{d^2y}{dx^2}$ in folgender Weise durch. Es ist

$$(1) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = \frac{df'(x)}{dx} = \operatorname{Lim}_{\Delta x=0} \frac{f'(x+\Delta x)-f'(x)}{\Delta x}.$$

Wir untersuchen die beiden Ausdrücke des Zählers $f'(x+\Delta x)$ und $f'(x)$. Offenbar ist:

$$f'(x+\Delta x) = \frac{d(x+\Delta x)}{dx},$$

also

$$(2) \qquad f'(x+\Delta x) = \operatorname{Lim}_{\Delta x=0} \frac{f(x+\Delta x+\Delta x)-f(x+\Delta x)}{\Delta x}.$$

Ferner ist

$$(3) \qquad f'(x) = \operatorname{Lim}_{\Delta x=0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Setzen wir die Werte aus den Gleichungen (2) und (3) in Gleichung (1) ein, so ergibt sich:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = \frac{df'(x)}{dx} = \operatorname{Lim}_{\Delta x=0} \frac{\frac{f(x+\Delta x+\Delta x)-f(x+\Delta x)}{\Delta x} - \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}}{\Delta x},$$

oder

$$(4) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = \frac{df'(x)}{dx} = \operatorname{Lim}_{\Delta x=0} \frac{f(x+2\Delta x)-2f(x+\Delta x)+f(x)}{(\Delta x)^2}.$$

Digitized by Google

§ 7.

Differentiation impliziter Funktionen.

Will oder kann man die Gleichung (1) $f(x, y) = 0$ weder nach x, noch nach y auflösen, so kann man dennoch durch folgende Betrachtung den Wert des Differentialquotienten ermitteln. Da $f(x, y)$ für alle zusammengehörenden Werte von x und y gleich Null werden soll, so muß auch

$$f(x + \Delta x,\ y + \Delta y) = 0$$

sein, also muß nach Gleichung (1) auch die Differenz

$$f(x + \Delta x,\ y + \Delta y) - f(x, y) = 0$$

sein. Also ist auch

$$\frac{f(x+\Delta x,\ y+\Delta y) - f(x,\ y)}{\Delta x} = 0,$$

also ist identisch auch

$$(1)\quad \frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)}{\Delta x} + \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0.$$

Gehen wir zur Grenze $\Delta x = 0$ über, so muß bei stetigen Funktionen auch $\Delta y = 0$, also $y + \Delta y = y$ werden. Der erste Posten der Gleichung (1) kann dann so aufgefaßt werden, als hätte man in der Funktion $f(x, y) = 0$ die Größe y als eine Konstante angesehen und nach x differenziert. Der erste Faktor des zweiten Postens kann so aufgefaßt werden, als hätte man in der Funktion $f(x, y) = 0$ die Größe x als eine Konstante angesehen und nach y differenziert. Solche Differentialquotienten werden „partielle Differentialquotienten“ genannt und mit dem Buchstaben ∂ bezeichnet. Mithin erhalten wir aus Gleichung (1), wenn wir zur Grenze $\Delta x = 0$ und damit $y + \Delta y = y$ übergehen, die Gleichung

$$(2)\qquad \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0,$$

also ist der gesuchte Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ der impliziten Funktion $f(x, y) = 0$

$$(3)\qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}}{\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}}.$$

Digitized by Google

Beispiel: $f(x, y) = x^5 + 5xy^7 + y^3 = 0$. — Es ist

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 5x^4 + 5y^7, \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 35xy^6 + 3y^2.$$

Also ist

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{5x^4 + 5y^7}{35xy^6 + 3y^2}.$$

§ 8.

Übungen.

A. Explizite Funktionen.

I. Einfache Funktionen.

(1) $y = a + x. \quad y' = 1. \quad y'' = 0.$

(2) $y = a - x. \quad y' = -1. \quad y'' = 0.$

(3) $y = ax. \quad y' = a. \quad y'' = 0.$

(4) $y = a + bx. \quad y' = b. \quad y'' = 0.$

(5) $y = a - bx. \quad y' = -b. \quad y'' = 0.$

(6) $y = \frac{x}{a}. \quad y' = \frac{1}{a}. \quad y'' = 0.$

(7) $y = -\frac{x}{a}. \quad y' = -\frac{1}{a}. \quad y'' = 0.$

(8) $y = \frac{a}{x}. \quad y' = \frac{x \cdot \frac{da}{dx} - a\frac{dx}{dx}}{x^2} = \frac{0 - a}{x^2} = -\frac{a}{x^2}. \quad y'' = \frac{2a}{x^3}.$

(9) $y = \frac{1}{x}. \quad y' = -\frac{1}{x^2}. \quad y'' = \frac{2}{x^3}.$

(10) $y = -\frac{a}{x}. \quad y' = \frac{a}{x^2}. \quad y'' = -\frac{2a}{x^3}.$

(11) $y = a + bx - cx^2 + dx^3 + gx^n. \quad y' = b - 2cx + 3dx^2 + ngx^{n-1}. \quad y'' = -2c + 6dx + n \cdot (n-1) g x^{n-2}.$

(12) $y = \frac{a}{x^2}. \quad y' = \frac{x^2 \cdot \frac{da}{dx} - a \cdot \frac{d(x^2)}{dx}}{x^4} = -\frac{2a}{x^3}. \quad y'' = \frac{6a}{x^4}.$

Digitized by Google

(13) $y = a - \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} - \frac{d}{x^3} + \frac{e}{x^n}$. $y' = \frac{b}{x^2} - \frac{2cx}{x^4} + \frac{3dx^2}{x^6} - \frac{nex^{n-1}}{x^{2n}} = \frac{b}{x^2} - \frac{2c}{x^3} + \frac{3d}{x^4} - \frac{ne}{x^{n+1}}$.

$y'' = -\frac{2b}{x^3} + \frac{6c}{x^4} - \frac{12d}{x^5} + \frac{(n+1)\cdot n\cdot e}{x^{n+2}}$.

(14) $y = (a + bx^3)(c - gx^3)$. $y' = (a + bx^3)(-3gx^2) + (c - gx^3)(2bx) = 2bcx - 3agx^2 - 5bgx^4$.

$y'' = 2bc - 6agx - 20bgx^3$.

(15) $y = (a + bx)(c - dx^2)(e - gx^3)$.

$y' = (a + bx)(c - dx^2)(-3gx^2) + (e - gx^3)\{(a+bx)(-2dx) + (c - dx^2)b\} = bce - 2adex - (acg + bde)3x^2 - 4bcgx^3 + 5adgx^4 + 6bdgx^5$.

$y'' = -2ade - (acg + bde)6x - 12bcgx^2 + 20adgx^3 + 30bdgx^4$.

(16) $y = \frac{(a+bx+cx^2)(ax^3 - bx^2 - cx)}{n}$.

$y' = \frac{1}{n}\{(a + bx + cx^2)(3ax^2 - 2bx - c) + (ax^3 - bx^2 - cx)(b + 2cx)\} = \frac{5acx^4 + 4b(a-c)x^3 + 3(a^2 - b^2 - c^2)x^2 - 2b(a+c)x - ac}{n}$.

$y'' = \frac{20acx^3 + 12b(a-c)x^2 + 6(a^2 - b^2 - c^2)x - 2b(a+c)}{n}$.

(17) $y = \frac{a+bx}{x^2}$. $y' = \frac{x^2\cdot b - (a+bx)2x}{x^4} = -\frac{2a+bx}{x^3}$.

$y'' = -\frac{x^3\cdot b - (2a+bx)3x^2}{x^6} = \frac{2(3a+bx)}{x^4}$.

(18) $y = \frac{a+bx^n}{x^m}$. $y' = \frac{x^m\cdot nbx^{n-1} - (a+bx^n)m\cdot x^{m-1}}{x^{2m}} = \frac{(n-m)bx^n - ma}{x^{m+1}}$.

$y'' = \frac{x^{m+1}\cdot n(n-m)bx^{n-1} - [(n-m)bx^n - ma](m+1)x^m}{x^{2m+2}} = \frac{(n-m)[n-(m+1)]bx^n + (m+1)ma}{x^{m+2}}$.

Digitized by Google

(19) $$y=\frac{a+bx^2}{c-dx}. \qquad y'=\frac{(c-dx)2bx-(a+bx^2)(-d)}{(c-dx)^2}$$
$$=\frac{ad+2bcx-bdx^2}{c^2-2cdx+d^2x^2}.$$
$$y''=\frac{(c-dx)^2(2bc-2bdx)-(ad+2bcx-bdx^2)(-2cd+2d^2x)}{(c-dx)^4}.$$
$$=\frac{2(bc^2+ad^2)}{(c-dx)^3}.$$

(20) $$y=\sqrt{x}. \qquad y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}. \qquad y''=-\frac{1}{4x\sqrt{x}}.$$

(21) $$y=\sqrt[3]{x}. \qquad y'=\frac{1}{3}\cdot x^{\frac{1}{3}-1}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}. \qquad y''=\frac{1}{3}\left\{\frac{\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1}}{x^{\frac{4}{3}}}\right\}$$
$$=-\frac{2}{9x\sqrt[3]{x^2}}.$$

(22) $$y=x\sqrt{x}. \qquad y'=\frac{x}{2\sqrt{x}}+\sqrt{x}=\frac{3}{2}\sqrt{x}.$$
$$y''=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{3}{4\sqrt{x}}.$$

(23) $$y=x^2\cdot\sqrt[3]{x}. \qquad y'=\frac{x^2}{3\sqrt[3]{x^2}}+2x\sqrt[3]{x}=\frac{7}{3}x\sqrt[3]{x}.$$
$$y''=\frac{7}{3}\left\{\frac{x}{3\sqrt[3]{x^2}}+\sqrt[3]{x}\right\}=\frac{28}{9}\sqrt[3]{x}.$$

(24) $$y=x^n\cdot\sqrt[m]{x}. \qquad y'=\frac{x^n}{m\sqrt[m]{x^{m-1}}}+\sqrt[m]{x}\cdot nx^{n-1}$$
$$=\frac{m\cdot n+1}{m}\cdot\sqrt[m]{x^{m(n-1)+1}}.$$
$$y''=\frac{(m\cdot n+1)[m(n-1)+1]}{m^2}\cdot\sqrt[m]{x^{m(n-2)+1}}.$$

(25) $$y=\frac{a}{\sqrt{x}}. \qquad y'=\frac{-\frac{a}{2\sqrt{x}}}{x}=-\frac{a}{2x\sqrt{x}}=-\frac{a\sqrt{x}}{2x^2}$$
$$y''=-\frac{a}{2}\left\{\frac{\frac{x^2}{2\sqrt{x}}-\sqrt{x}\cdot 2x}{x^4}\right\}=\frac{3a}{4x^2\sqrt{x}}.$$

Digitized by Google

(26) $y = \frac{a}{b\sqrt[3]{x}}$. $y' = \frac{a}{b}\left\{\frac{-\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}{\sqrt[3]{x^2}}\right\} = -\frac{a}{3bx\sqrt[3]{x}}$.

$$y'' = -\frac{a}{3b}\left\{\frac{-\frac{x}{3\sqrt[3]{x^2}} + \sqrt[3]{x}}{x^2 \cdot \sqrt[3]{x^2}}\right\} = \frac{4a}{9bx^2\sqrt[3]{x}}.$$

(27) $y = \frac{a}{b\sqrt[n]{x}}$. $y' = \frac{a}{b}\left\{\frac{-\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}}{\sqrt[n]{x^2}}\right\} = -\frac{a}{nbx\sqrt[n]{x}}$.

$$y'' = -\frac{a}{nb}\left\{\frac{-\left(\frac{x}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}} + \sqrt[n]{x}\right)}{x^2\sqrt[n]{x^2}}\right\} = \frac{(n+1)a}{n^2bx^2\sqrt[n]{x}}.$$

(28) $y = \frac{a}{x^2\sqrt[3]{x}}$.

Man kann auch folgendermaßen rechnen:

$y = \frac{a}{x^{\frac{10}{3}}} = ax^{-\frac{10}{3}}$, also $y' = -\frac{10}{3}ax^{-\frac{10}{3}-1} = -\frac{10a}{3x^4\sqrt[3]{x}}$.

Da $y' = -\frac{10}{3}ax^{-\frac{13}{3}}$ ist, so ist

$$y'' = \left(-\frac{10}{3}a\right)\cdot\left(-\frac{13}{3}\right)x^{-\frac{13}{3}-1} = \frac{130a}{9x^5\sqrt[3]{x}}.$$

(29) $y = ax\sqrt[3]{x^2} - bx^2\sqrt[4]{x^3} + \frac{c}{x\sqrt[5]{x^4}}$.

$$y' = \frac{5}{3}a\sqrt[3]{x^2} - \frac{11}{4}bx\sqrt[4]{x^3} - \frac{9c}{5x^2\sqrt[5]{x^4}}.$$

$$y'' = \frac{10a}{9\sqrt[3]{x}} - \frac{77}{16}b\sqrt[4]{x^3} + \frac{126c}{25x^3\sqrt[5]{x^4}}.$$

(30) $y = x \cdot lx$. $y' = \frac{x}{x} + lx = 1 + lx$. $y'' = \frac{1}{x}$.

(31) $y = x^n \cdot lx$. $y' = \frac{x^n}{x} + lx \cdot nx^{n-1}$

$= x^{n-1} \cdot (1 + n \cdot lx)$.

$y'' = x^{n-1} \cdot \frac{n}{x} + (1 + nlx)(n-1)x^{n-2}$

$= x^{n-2}[2n - 1 + (n-1)n \cdot lx]$.

Digitized by Google

(32) $$y = (lx)^2 = lx \cdot lx. \qquad y' = \frac{lx}{x} + \frac{lx}{x} = \frac{2\,lx}{x}.$$

$$y'' = \frac{x \cdot \frac{2}{x} - 2\,lx}{x^2} = \frac{2(1-lx)}{x^2}.$$

(33) $$y = \frac{x}{lx}. \qquad y' = \frac{lx - \frac{x}{x}}{(lx)^2} = \frac{lx-1}{(lx)^2}. \qquad y'' = \frac{(lx)^2 \cdot \frac{1}{x} - (lx-1) \cdot \frac{2\,lx}{x}}{(lx)^4}$$

$$= \frac{2-lx}{x\,(lx)^3}.$$

(34) $$y = \frac{x^n}{lx}. \qquad y' = \frac{lx \cdot n x^{n-1} - x^n \cdot \frac{1}{x}}{(lx)^2} = \frac{x^{n-1}(n\,lx-1)}{(lx)^2}.$$

$$y'' = \frac{(lx)^2\left\{x^{n-1} \cdot \frac{n}{x} + (n\,lx-1)(n-1)x^{n-2}\right\} - x^{n-1}(n\,lx-1) \cdot \frac{2\,lx}{x}}{(lx)^4}$$

$$= \frac{x^{n-2}\left[n(n-1)(lx)^2 - lx\,(2n-1) + 2\right]}{(lx)^3}.$$

(35) $$y = \frac{lx}{x}. \qquad y' = \frac{\frac{x}{x} - lx}{x^2} = \frac{1-lx}{x^2}.$$

$$y'' = \frac{x^2\left(-\frac{1}{x}\right) - (1-lx)\,2x}{x^4} = \frac{2\,lx-3}{x^3}.$$

(36) $$y = \frac{lx}{x^n}. \qquad y' = \frac{x^n \cdot \frac{1}{x} - lx \cdot n x^{n-1}}{x^{2n}} = \frac{1-n\,lx}{x^{n+1}}.$$

$$y'' = \frac{x^{n+1} \cdot \left(-\frac{n}{x}\right) - (1-n\,lx)\,(n+1)\,x^n}{x^{2n+2}}$$

$$= \frac{(n+1) \cdot n \cdot lx - (2n+1)}{x^{n+2}}.$$

(37) $$y = \sqrt{x} \cdot lx. \qquad y' = \frac{\sqrt{x}}{x} + \frac{lx}{2\sqrt{x}} = \frac{2+lx}{2\sqrt{x}}.$$

$$y'' = \frac{1}{2}\left\{\frac{\sqrt{x} \cdot \frac{1}{x} - (2+lx) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}\right\} = -\frac{lx}{4x\sqrt{x}}.$$

Digitized by Google

(38) $y = \sqrt[n]{x} \cdot lx. \quad y' = \sqrt[n]{x} \cdot \frac{1}{x} + lx \cdot \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$

$$= \frac{n + lx}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}. \quad y'' = \frac{1}{n} \cdot \left\{ \frac{x^{\frac{n-1}{n}} \cdot \frac{1}{x} - (n + lx) \cdot \frac{n-1}{n} x^{\frac{n-1}{n} - 1}}{x^{\frac{2(n-1)}{n}}} \right\}$$

$$= \frac{n(2-n) + (1-n)\, lx}{n^2 \sqrt[n]{x^{2n-1}}}.$$

(39) $$y = \frac{lx}{\sqrt{x}}. \quad y' = \frac{\sqrt{x} \cdot \frac{1}{x} - lx \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{2 - lx}{2x\sqrt{x}}.$$

$$y'' = \frac{1}{2} \left\{ \frac{x\sqrt{x} \cdot \left(-\frac{1}{x}\right) - (2 - lx)\left(x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}\right)}{x^3} \right\}$$

$$= \frac{3lx - 8}{4x^2\sqrt{x}}.$$

(40) $$y = \frac{lx}{\sqrt[n]{x}}. \quad y' = \frac{\sqrt[n]{x} \cdot \frac{1}{x} - lx \cdot \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}}{\sqrt[n]{x^2}} = \frac{n - lx}{nx\sqrt[n]{x}}.$$

$$y'' = \frac{1}{n} \cdot \left\{ \frac{x\sqrt[n]{x}\left(-\frac{1}{x}\right) - (n - lx)\left(x \cdot \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}} + \sqrt[n]{x}\right)}{x^2\sqrt[n]{x^2}} \right\}$$

$$= \frac{(n+1)\, lx - n(n+2)}{n^2 x^2 \sqrt[n]{x}}.$$

(41) $y = x \cdot e^x. \quad y' = xe^x + e^x = (x+1) \cdot e^x.$

$$y'' = (x+1)\, e^x + e^x = (x+2)\, e^x.$$

(42) $y = x^n \cdot e^x. \quad y' = x^n e^x + e^x \cdot n x^{n-1} = (x+n)\, x^{n-1} \cdot e^x.$

$$y'' = (x+n)\, x^{n-1} \cdot e^x + e^x \{(x+n)(n-1)\, x^{n-2} + x^{n-1}\}$$

$$= x^{n-2} e^x [(x+n)^2 - n].$$

Digitized by Google

(43) $y = \frac{e^x}{x}. \qquad y' = \frac{xe^x - e^x}{x^2} = \frac{(x-1)e^x}{x^2}.$

$$y'' = \frac{x^2\left[(x-1)e^x + e^x\right] - (x-1)e^x \cdot 2x}{x^4} = \frac{(x^2-2x+2)e^x}{x^3}.$$

(44) $y = \frac{e^x}{x^n}. \qquad y' = \frac{x^n e^x - e^x \cdot nx^{n-1}}{x^{2n}} = \frac{(x-n)e^x}{x^{n+1}}.$

$$y'' = \frac{x^{n+1}\left\{(x-n)e^x + e^x\right\} - (x-n)e^x(n+1)x^n}{x^{2n+2}} = \frac{\left[n+(x-n)^2\right]e^x}{x^{n+2}}.$$

(45) $y = \frac{x}{e^x}. \qquad y' = \frac{e^x - x \cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{1-x}{e^x}.$

$$y'' = \frac{e^x \cdot (-1) - (1-x)e^x}{e^{2x}} = \frac{x-2}{e^x}.$$

(46) $y = \frac{x^n}{e^x}. \qquad y' = \frac{e^x \cdot nx^{n-1} - x^n e^x}{e^{2x}} = \frac{(n-x)x^{n-1}}{e^x}.$

$$y'' = \frac{e^x\left\{(n-x)(n-1)x^{n-2} + x^{n-1}\cdot(-1)\right\} - (n-x)x^{n-1}\cdot e^x}{e^{2x}}$$

$$= \frac{\left[(n-x)^2 - n\right]x^{n-2}}{e^x}.$$

(47) $y = e^x \cdot \sqrt{x}. \qquad y' = e^x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}\cdot e^x = \frac{(2x+1)e^x}{2\sqrt{x}}.$

$$y'' = \frac{1}{2}\left\{\frac{\sqrt{x}\left[(2x+1)e^x + e^x\cdot 2\right] - (2x+1)e^x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}\right\}$$

$$= \frac{(4x^2+4x-1)e^x}{4x\sqrt{x}}.$$

(48) $y = e^x \cdot \sqrt[n]{x}. \qquad y' = e^x \cdot \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}} + \sqrt[n]{x}\cdot e^x = \frac{(nx+1)e^x}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}.$

$$y'' = \frac{1}{n}\left\{\frac{x^{\frac{n-1}{n}}\left[(nx+1)e^x + e^x\cdot n\right] - (nx+1)e^x \cdot \frac{n-1}{n}x^{\frac{n-1}{n}-1}}{x^{\frac{2(n-1)}{n}}}\right\}$$

$$= \frac{(n^2x^2+2nx-n+1)e^x}{n^2x\sqrt[n]{x^{n-1}}}.$$

Digitized by Google

(49) $y = \frac{e^x}{\sqrt{x}}. \qquad y' = \frac{\sqrt{x}\cdot e^x - e^x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{(2x-1)e^x}{2x\sqrt{x}}.$

$$y'' = \frac{1}{2}\left\{\frac{x\sqrt{x}\left[(2x-1)e^x + e^x\cdot 2\right] - (2x-1)e^x\left[x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}\right]}{x^3}\right\}$$

$$= \frac{(4x^3 - 4x + 3)e^x}{4x^2\sqrt{x}}.$$

(50) $y = \frac{e^x}{\sqrt[n]{x}}. \qquad y' = \frac{\sqrt[n]{x}\cdot e^x - e^x\cdot\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}}{\sqrt[n]{x^2}} = \frac{(nx-1)e^x}{nx\sqrt[n]{x}}.$

$$y'' = \frac{1}{n}\left\{\frac{x\sqrt[n]{x}\left[(nx-1)e^x + e^x n\right] - (nx-1)e^x\left[x\cdot\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}} + \sqrt[n]{x}\right]}{x^2\sqrt[n]{x^2}}\right\}$$

$$= \frac{(n^2x^2 - 2nx + n + 1)e^x}{n^2x^2\sqrt[n]{x}}.$$

(51) $y = e^x\cdot lx. \qquad y' = e^x\cdot\frac{1}{x} + lx\cdot e^x = \frac{(1 + x\,lx)e^x}{x}.$

$$y'' = \frac{x\left[(1 + x\,lx)e^x + e^x\left(x\cdot\frac{1}{x} + lx\right)\right] - (1 + x\,lx)e^x}{x^2}$$

$$= \frac{(x^2 lx + 2x - 1)e^x}{x^2}.$$

(52) $y = \frac{e^x}{lx}. \qquad y' = \frac{lx\cdot e^x - e^x\cdot\frac{1}{x}}{(lx)^2} = \frac{(x\,lx - 1)e^x}{x(lx)^2}.$

$$y'' = \frac{x(lx)^2\left[(x\,lx-1)e^x + e^x\left(x\cdot\frac{1}{x} + lx\right)\right] - (x\,lx-1)e^x\left[x\cdot\frac{2\,lx}{x} + (lx)^2\right]}{x^2(lx)^4}$$

$$= \frac{[x^2(lx)^2 - 2x\,lx + lx + 2]\cdot e^x}{x^2(lx)^3}.$$

(53) $y = x^n\cdot\sin x.$

$$y' = x^n\cdot\cos x + \sin x\cdot nx^{n-1} = x^{n-1}\cdot(x\cos x + n\sin x).$$

$$y'' = x^n\cdot(-\sin x) + \cos x\cdot nx^{n-1} + \sin x\cdot n\cdot(n-1)x^{n-2} + nx^{n-1}\cos x$$

$$= x^{n-2}\cdot[n(n-1)\sin x + 2nx\cos x - x^2\sin x].$$

Digitized by Google

Beispiel: $f(x, y) = x^5 + 5xy^7 + y^3 = 0$. — Es ist

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 5x^4 + 5y^7, \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 35xy^6 + 3y^2.$$

Also ist

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{5x^4 + 5y^7}{35xy^6 + 3y^2}.$$

§ 8.

Übungen.

A. Explizite Funktionen.

I. Einfache Funktionen.

(1) $y = a + x. \quad y' = 1. \quad y'' = 0.$

(2) $y = a - x. \quad y' = -1. \quad y'' = 0.$

(3) $y = ax. \quad y' = a. \quad y'' = 0.$

(4) $y = a + bx. \quad y' = b. \quad y'' = 0.$

(5) $y = a - bx. \quad y' = -b. \quad y'' = 0.$

(6) $y = \frac{x}{a}. \quad y' = \frac{1}{a}. \quad y'' = 0.$

(7) $y = -\frac{x}{a}. \quad y' = -\frac{1}{a}. \quad y'' = 0.$

(8) $y = \frac{a}{x}. \quad y' = \frac{x \cdot \frac{da}{dx} - a\frac{dx}{dx}}{x^2} = \frac{0 - a}{x^2} = -\frac{a}{x^2}. \quad y'' = \frac{2a}{x^3}.$

(9) $y = \frac{1}{x}. \quad y' = -\frac{1}{x^2}. \quad y'' = \frac{2}{x^3}.$

(10) $y = -\frac{a}{x}. \quad y' = \frac{a}{x^2}. \quad y'' = -\frac{2a}{x^3}.$

(11) $y = a + bx - cx^2 + dx^3 + gx^n. \quad y' = b - 2cx + 3dx^2 + ngx^{n-1}. \quad y'' = -2c + 6dx + n \cdot (n-1) g x^{n-2}.$

(12) $y = \frac{a}{x^2}. \quad y' = \frac{x^2 \cdot \frac{da}{dx} - a \cdot \frac{d(x^2)}{dx}}{x^4} = -\frac{2a}{x^3}. \quad y'' = \frac{6a}{x^4}.$

Digitized by Google

(13) $y = a - \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} - \frac{d}{x^3} + \frac{e}{x^n}$. $y' = \frac{b}{x^2} - \frac{2cx}{x^4} + \frac{3dx^2}{x^6} - \frac{nex^{n-1}}{x^{2n}} = \frac{b}{x^2} - \frac{2c}{x^3} + \frac{3d}{x^4} - \frac{ne}{x^{n+1}}$.

$y'' = -\frac{2b}{x^3} + \frac{6c}{x^4} - \frac{12d}{x^5} + \frac{(n+1)\cdot n\cdot e}{x^{n+2}}$.

(14) $y = (a + bx^2)(c - gx^3)$. $y' = (a + bx^2)(-3gx^2) + (c - gx^3)(2bx) = 2bcx - 3agx^2 - 5bgx^4$.

$y'' = 2bc - 6agx - 20bgx^3$.

(15) $y = (a + bx)(c - dx^2)(e - gx^3)$.

$y' = (a + bx)(c - dx^2)(-3gx^2) + (e - gx^3)\{(a+bx)(-2dx) + (c - dx^2)b\}$

$= bce - 2adex - (acg + bde)3x^2 - 4bcgx^3 + 5adgx^4 + 6bdgx^5$.

$y'' = -2ade - (acg + bde)6x - 12bcgx^2 + 20adgx^3 + 30bdgx^4$.

(16) $y = \frac{(a+bx+cx^2)(ax^3 - bx^2 - cx)}{n}$.

$y' = \frac{1}{n}\left\{(a + bx + cx^2)(3ax^2 - 2bx - c) + (ax^3 - bx^2 - cx)(b + 2cx)\right\}$

$= \frac{5acx^4 + 4b(a-c)x^3 + 3(a^2 - b^2 - c^2)x^2 - 2b(a+c)x - ac}{n}$.

$y'' = \frac{20acx^3 + 12b(a-c)x^2 + 6(a^2 - b^2 - c^2)x - 2b(a+c)}{n}$.

(17) $y = \frac{a+bx}{x^2}$. $y' = \frac{x^2\cdot b - (a+bx)2x}{x^4} = -\frac{2a+bx}{x^3}$.

$y'' = -\frac{x^3\cdot b - (2a+bx)3x^2}{x^6} = \frac{2(3a+bx)}{x^4}$.

(18) $y = \frac{a+bx^n}{x^m}$. $y' = \frac{x^m\cdot nbx^{n-1} - (a+bx^n)m\cdot x^{m-1}}{x^{2m}} = \frac{(n-m)bx^n - ma}{x^{m+1}}$.

$y'' = \frac{x^{m+1}\cdot n(n-m)bx^{n-1} - [(n-m)bx^n - ma](m+1)x^m}{x^{2m+2}}$

$= \frac{(n-m)[n-(m+1)]bx^n + (m+1)ma}{x^{m+2}}$.

Digitized by Google

(19) $y = \frac{a+bx^2}{c-dx}$. $y' = \frac{(c-dx)2bx-(a+bx^2)(-d)}{(c-dx)^2}$

$$= \frac{ad+2bcx-bdx^2}{c^2-2cdx+d^2x^2}.$$

$$y'' = \frac{(c-dx)^2(2bc-2bdx)-(ad+2bcx-bdx^2)(-2cd+2d^2x)}{(c-dx)^4}.$$

$$= \frac{2(bc^2+ad^2)}{(c-dx)^3}.$$

(20) $y = \sqrt{x}$. $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. $y'' = -\frac{1}{4x\sqrt{x}}$.

(21) $y = \sqrt[3]{x}$. $y' = \frac{1}{3}\cdot x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$. $y'' = \frac{1}{3}\left|\frac{\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1}}{x^{\frac{4}{3}}}\right|$

$$= -\frac{2}{9x\sqrt[3]{x^2}}.$$

(22) $y = x\sqrt{x}$. $y' = \frac{x}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$.

$$y'' = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{3}{4\sqrt{x}}.$$

(23) $y = x^2\cdot\sqrt[3]{x}$. $y' = \frac{x^2}{3\sqrt[3]{x^2}} + 2x\sqrt[3]{x} = \frac{7}{3}x\sqrt[3]{x}$.

$$y'' = \frac{7}{3}\left\{\frac{x}{3\sqrt[3]{x^2}} + \sqrt[3]{x}\right\} = \frac{28}{9}\sqrt[3]{x}.$$

(24) $y = x^n\cdot\sqrt[m]{x}$. $y' = \frac{x^n}{m\sqrt[m]{x^{m-1}}} + \sqrt[m]{x}\cdot nx^{n-1}$

$$= \frac{m\cdot n+1}{m}\cdot\sqrt[m]{x^{m(n-1)+1}}.$$

$$y'' = \frac{(m\cdot n+1)[m(n-1)+1]}{m^2}\cdot\sqrt[m]{x^{m(n-2)+1}}.$$

(25) $y = \frac{a}{\sqrt{x}}$. $y' = \frac{-\frac{a}{2\sqrt{x}}}{x} = -\frac{a}{2x\sqrt{x}} = -\frac{a\sqrt{x}}{2x^2}$

$$y'' = -\frac{a}{2}\left\{\frac{x^2}{2\sqrt{x}-\sqrt{x}\cdot 2x}{x^4}\right\} = \frac{3a}{4x^2\sqrt{x}}.$$

Digitized by Google

(26) $y = \frac{a}{b\sqrt[3]{x}}$. $y' = \frac{a}{b}\left\{\frac{-\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}{\sqrt[3]{x^2}}\right\} = -\frac{a}{3bx\sqrt[3]{x}}$.

$$y'' = -\frac{a}{3b}\left\{\frac{-\frac{x}{3\sqrt[3]{x^2}} + \sqrt[3]{x}}{x^2 \cdot \sqrt[3]{x^2}}\right\} = \frac{4a}{9bx^2\sqrt[3]{x}}.$$

(27) $y = \frac{a}{b\sqrt[n]{x}}$. $y' = \frac{a}{b}\left\{\frac{-\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}}{\sqrt[n]{x^2}}\right\} = -\frac{a}{nbx\sqrt[n]{x}}$.

$$y'' = -\frac{a}{nb}\cdot\left\{\frac{-\left(\frac{x}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}} + \sqrt[n]{x}\right)}{x^2\sqrt[n]{x^2}}\right\} = \frac{(n+1)a}{n^2bx^2\sqrt[n]{x}}.$$

(28) $y = \frac{a}{x^2\sqrt[3]{x}}$.

Man kann auch folgendermaßen rechnen:

$y = \frac{a}{x^{\frac{10}{3}}} = ax^{-\frac{10}{3}}$, also $y' = -\frac{10}{3}ax^{-\frac{10}{3}-1} = -\frac{10a}{3x^4\sqrt[3]{x}}$.

Da $y' = -\frac{10}{3}ax^{-\frac{13}{3}}$ ist, so ist

$$y'' = \left(-\frac{10}{3}a\right)\cdot\left(-\frac{13}{3}\right)x^{-\frac{13}{3}-1} = \frac{130a}{9x^5\sqrt[3]{x}}.$$

(29) $y = ax\sqrt[3]{x^2} - bx^2\sqrt[4]{x^5} + \frac{c}{x^5\sqrt[4]{x^4}}$.

$$y' = \frac{5}{3}a\sqrt[3]{x^2} - \frac{11}{4}bx\sqrt[4]{x^5} - \frac{9c}{5x^2\sqrt[5]{x^4}}.$$

$$y'' = \frac{10a}{9\sqrt[3]{x}} - \frac{77}{16}b\sqrt[4]{x^5} + \frac{126c}{25x^3\sqrt[5]{x^4}}.$$

(30) $y = x \cdot lx$. $y' = \frac{x}{x} + lx = 1 + lx$. $y'' = \frac{1}{x}$.

(31) $y = x^n \cdot lx$. $y' = \frac{x^n}{x} + lx \cdot nx^{n-1}$

$= x^{n-1} \cdot (1 + n \cdot lx)$.

$y'' = x^{n-1} \cdot \frac{n}{x} + (1 + nlx)(n-1)x^{n-2}$

$= x^{n-2}[2n - 1 + (n-1)n \cdot lx]$.

Digitized by Google

(32) $$y=(lx)^2=lx\cdot lx. \qquad y'=\frac{lx}{x}+\frac{lx}{x}=\frac{2\,lx}{x}.$$

$$y''=\frac{x\cdot\frac{2}{x}-2\,lx}{x^2}=\frac{2(1-lx)}{x^2}.$$

(33) $$y=\frac{x}{lx}. \qquad y'=\frac{lx-\frac{x}{x}}{(lx)^2}=\frac{lx-1}{(lx)^2}. \qquad y''=\frac{(lx)^2\cdot\frac{1}{x}-(lx-1)\cdot\frac{2\,lx}{x}}{(lx)^4}$$

$$=\frac{2-lx}{x\,(lx)^3}.$$

(34) $$y=\frac{x^n}{lx}. \qquad y'=\frac{lx\cdot nx^{n-1}-x^n\cdot\frac{1}{x}}{(lx)^2}=\frac{x^{n-1}(nlx-1)}{(lx)^2}.$$

$$y''=\frac{(lx)^2\left\{x^{n-1}\cdot\frac{n}{x}+(nlx-1)(n-1)x^{n-2}\right\}-x^{n-1}(nlx-1)\cdot\frac{2lx}{x}}{(lx)^4}$$

$$=\frac{x^{n-2}\left[n(n-1)(lx)^2-lx(2n-1)+2\right]}{(lx)^3}.$$

(35) $$y=\frac{lx}{x}. \qquad y'=\frac{\frac{x}{x}-lx}{x^2}=\frac{1-lx}{x^2}.$$

$$y''=\frac{x^2\left(-\frac{1}{x}\right)-(1-lx)\,2x}{x^4}=\frac{2lx-3}{x^3}.$$

(36) $$y=\frac{lx}{x^n}. \qquad y'=\frac{x^n\cdot\frac{1}{x}-lx\cdot nx^{n-1}}{x^{2n}}=\frac{1-nlx}{x^{n+1}}.$$

$$y''=\frac{x^{n+1}\cdot\left(-\frac{n}{x}\right)-(1-nlx)(n+1)x^n}{x^{2n+2}}$$

$$=\frac{(n+1)\cdot n\cdot lx-(2n+1)}{x^{n+2}}.$$

(37) $$y=\sqrt{x}\cdot lx. \qquad y'=\frac{\sqrt{x}}{x}+\frac{lx}{2\sqrt{x}}=\frac{2+lx}{2\sqrt{x}}.$$

$$y''=\frac{1}{2}\left\{\frac{\sqrt{x}\cdot\frac{1}{x}-(2+lx)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}\right\}=-\frac{lx}{4x\sqrt{x}}.$$

Digitized by Google

(38) $y=\sqrt[n]{x}\cdot lx. \quad y'=\sqrt[n]{x}\cdot\frac{1}{x}+lx\cdot\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$

$$=\frac{n+lx}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}. \quad y''=\frac{1}{n}\cdot\left\{\frac{x^{\frac{n-1}{n}}\cdot\frac{1}{x}-(n+lx)\cdot\frac{n-1}{n}x^{\frac{n-1}{n}-1}}{x^{\frac{2(n-1)}{n}}}\right\}$$

$$=\frac{n(2-n)+(1-n)lx}{n^2\sqrt[n]{x^{2n-1}}}.$$

(39) $$y=\frac{lx}{\sqrt{x}}. \quad y'=\frac{\sqrt{x}\cdot\frac{1}{x}-lx\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}=\frac{2-lx}{2x\sqrt{x}}.$$

$$y''=\frac{1}{2}\left\{\frac{x\sqrt{x}\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)-(2-lx)\left(x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}+\sqrt{x}\right)}{x^3}\right\}$$

$$=\frac{3lx-8}{4x^2\sqrt{x}}.$$

(40) $$y=\frac{lx}{\sqrt[n]{x}}. \quad y'=\frac{\sqrt[n]{x}\cdot\frac{1}{x}-lx\cdot\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}}{\sqrt[n]{x^2}}=\frac{n-lx}{nx\sqrt[n]{x}}.$$

$$y''=\frac{1}{n}\cdot\left\{\frac{x\sqrt[n]{x}\left(-\frac{1}{x}\right)-(n-lx)\left(x\cdot\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}+\sqrt[n]{x}\right)}{x^2\sqrt[n]{x^2}}\right\}$$

$$=\frac{(n+1)lx-n(n+2)}{n^2x^2\sqrt[n]{x}}.$$

(41) $y=x\cdot e^x. \quad y'=xe^x+e^x=(x+1)\cdot e^x.$

$$y''=(x+1)e^x+e^x=(x+2)e^x.$$

(42) $y=x^n\cdot e^x. \quad y'=x^ne^x+e^x\cdot nx^{n-1}=(x+n)x^{n-1}\cdot e^x.$

$$y''=(x+n)x^{n-1}\cdot e^x$$
$$+e^x\{(x+n)(n-1)x^{n-2}+x^{n-1}\}$$
$$=x^{n-2}e^x[(x+n)^2-n].$$

Digitized by Google

(43) $y = \frac{e^x}{x}. \qquad y' = \frac{xe^x - e^x}{x^2} = \frac{(x-1)\,e^x}{x^2}.$

$$y'' = \frac{x^2\left[(x-1)\,e^x + e^x\right] - (x-1)\,e^x \cdot 2x}{x^4} = \frac{(x^2 - 2x + 2)\,e^x}{x^3}.$$

(44) $y = \frac{e^x}{x^n}. \qquad y' = \frac{x^n e^x - e^x \cdot nx^{n-1}}{x^{2n}} = \frac{(x-n)\,e^x}{x^{n+1}}.$

$$y'' = \frac{x^{n+1}\left\{(x-n)\,e^x + e^x\right\} - (x-n)\,e^x\,(n+1)x^n}{x^{2n+2}} = \frac{\left[n + (x-n)^2\right]e^x}{x^{n+2}}.$$

(45) $y = \frac{x}{e^x}. \qquad y' = \frac{e^x - x \cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{1-x}{e^x}.$

$$y'' = \frac{e^x \cdot (-1) - (1-x)\,e^x}{e^{2x}} = \frac{x-2}{e^x}.$$

(46) $y = \frac{x^n}{e^x}. \qquad y' = \frac{e^x \cdot nx^{n-1} - x^n e^x}{e^{2x}} = \frac{(n-x)\,x^{n-1}}{e^x}.$

$$y'' = \frac{e^x\left\{(n-x)(n-1)x^{n-2} + x^{n-1} \cdot (-1)\right\} - (n-x)\,x^{n-1} \cdot e^x}{e^{2x}}$$

$$= \frac{\left[(n-x)^2 - n\right]x^{n-2}}{e^x}.$$

(47) $y = e^x \cdot \sqrt{x}. \qquad y' = e^x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x} \cdot e^x = \frac{(2x+1)e^x}{2\sqrt{x}}.$

$$y'' = \frac{1}{2}\left\{\frac{\sqrt{x}\left[(2x+1)e^x + e^x \cdot 2\right] - (2x+1)e^x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}\right\}$$

$$= \frac{(4x^2 + 4x - 1)\,e^x}{4x\sqrt{x}}.$$

(48) $y = e^x \cdot \sqrt[n]{x}. \qquad y' = e^x \cdot \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}} + \sqrt[n]{x} \cdot e^x = \frac{(nx+1)e^x}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}.$

$$y'' = \frac{1}{n}\left\{\frac{x^{\frac{n-1}{n}}\left[(nx+1)e^x + e^x \cdot n\right] - (nx+1)e^x \cdot \frac{n-1}{n}x^{\frac{n-1}{n}-1}}{x^{\frac{2(n-1)}{n}}}\right\}$$

$$= \frac{(n^2x^2 + 2nx - n + 1)e^x}{n^2 x\sqrt[n]{x^{n-1}}}.$$

Digitized by Google

(49) $y = \frac{e^x}{\sqrt{x}}$. $y' = \frac{\sqrt{x}\cdot e^x - e^x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{(2x-1)e^x}{2x\sqrt{x}}$.

$$y'' = \frac{1}{2}\left\{\frac{x\sqrt{x}\left[(2x-1)e^x + e^x\cdot 2\right] - (2x-1)e^x\left[x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}\right]}{x^3}\right\}$$

$$= \frac{(4x^2-4x+3)e^x}{4x^2\sqrt{x}}.$$

(50) $y = \frac{e^x}{\sqrt[n]{x}}$. $y' = \frac{\sqrt[n]{x}\cdot e^x - e^x\cdot\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}}{\sqrt[n]{x^2}} = \frac{(nx-1)e^x}{nx\sqrt[n]{x}}$.

$$y'' = \frac{1}{n}\left\{\frac{x\sqrt[n]{x}\left[(nx-1)e^x + e^x n\right] - (nx-1)e^x\left[x\cdot\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}} + \sqrt[n]{x}\right]}{x^2\sqrt[n]{x^2}}\right\}$$

$$= \frac{(n^2x^2-2nx+n+1)e^x}{n^2x^2\sqrt[n]{x}}.$$

(51) $y = e^x\cdot lx$. $y' = e^x\cdot\frac{1}{x} + lx\cdot e^x = \frac{(1+xlx)e^x}{x}$.

$$y'' = \frac{x\left[(1+xlx)e^x + e^x\left(x\cdot\frac{1}{x} + lx\right)\right] - (1+xlx)e^x}{x^2}$$

$$= \frac{(x^2lx+2x-1)e^x}{x^2}.$$

(52) $y = \frac{e^x}{lx}$. $y' = \frac{lx\cdot e^x - e^x\cdot\frac{1}{x}}{(lx)^2} = \frac{(xlx-1)e^x}{x(lx)^2}$.

$$y'' = \frac{x(lx)^2\left[(xlx-1)e^x + e^x\left(x\cdot\frac{1}{x} + lx\right)\right] - (xlx-1)e^x\left[x\cdot\frac{2lx}{x} + (lx)^2\right]}{x^2(lx)^4}$$

$$= \frac{[x^2(lx)^2 - 2xlx + lx + 2]\cdot e^x}{x^2(lx)^3}.$$

(53) $y = x^n\cdot\sin x$.

$$y' = x^n\cdot\cos x + \sin x\cdot nx^{n-1} = x^{n-1}\cdot(x\cos x + n\sin x).$$

$$y'' = x^n\cdot(-\sin x) + \cos x\cdot nx^{n-1} + \sin x\cdot n\cdot(n-1)x^{n-2} + nx^{n-1}\cos x$$

$$= x^{n-2}\cdot[n(n-1)\sin x + 2nx\cos x - x^2\sin x].$$

Digitized by Google

(54) $y = \frac{\sin x}{x^n}$.

$$y' = \frac{x^n \cos x - \sin x \cdot n x^{n-1}}{x^{2n}} = \frac{x \cos x - n \sin x}{x^{n+1}}.$$

$$y'' = \frac{x^{n+1}\{x(-\sin x) + \cos x - n \cos x\} - (x \cos x - n \sin x)(n+1)x^n}{x^{2n+2}}$$

$$= \frac{(n^2 + n - x^2) \sin x - 2nx \cos x}{x^{n+2}}.$$

(55) $y = \sin^2 x = \sin x \cdot \sin x$.

$$y' = \sin x \cos x + \sin x \cos x = 2 \sin x \cos x = \sin 2x.$$

$$y'' = 2\{\sin x(-\sin x) + \cos x \cos x\} = 2 \cos 2x.$$

(56) $y = \frac{x^n}{\sin x}$.

$$y' = \frac{\sin x \cdot n x^{n-1} - x^n \cos x}{\sin^2 x} = \frac{x^{n-1}(n \sin x - x \cos x)}{\sin^2 x}.$$

$$y'' = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\sin^2 x\{\sin x \cdot n(n-1)x^{n-2} + nx^{n-1} \cos x - [x^n(-\sin x) + \cos x \cdot n x^{n-1}]\}}{\sin^4 x} \\ \qquad - \frac{(\sin x \cdot n x^{n-1} - x^n \cos x)\, 2 \sin x \cos x}{\sin^4 x}. \end{array} \right.$$

$$y'' = \frac{x^{n-2}\{[n(n-1) + x^2] \sin^2 x + 2x \cos x [x \cos x - n \sin x]\}}{\sin^3 x}.$$

(57) $y = \sqrt[n]{x} \cdot \sin x$.

$$y' = \sqrt[n]{x} \cdot \cos x + \sin x \cdot \frac{1}{n \sqrt[n]{x^{n-1}}} = \frac{nx \cos x + \sin x}{n \sqrt[n]{x^{n-1}}}.$$

$$y'' = \frac{1}{n} \cdot \left\{ \frac{x^{\frac{n-1}{n}} \cdot [nx(-\sin x) + n \cos x + \cos x] - (nx \cos x + \sin x) \cdot \frac{n-1}{n} x^{\frac{n-1}{n} - 1}}{x^{\frac{2(n-1)}{n}}} \right\}$$

$$y'' = \frac{\sqrt[n]{x}\,[(1 - n - n^2 x^2) \sin x + 2nx \cos x]}{n^2 x^2}.$$

(58) $y = e^x \sin x$. $\quad y' = e^x \cos x + e^x \sin x = e^x(\sin x + \cos x)$.

$$y'' = e^x(-\sin x) + e^x \cos x + e^x \cos x + e^x \sin x = 2e^x \cos x.$$

(59) $y = \frac{\sin x}{e^x}$. $\qquad y' = \frac{e^x \cos x - e^x \sin x}{e^{2x}} = \frac{\cos x - \sin x}{e^x}$.

$$y'' = \frac{e^x[-\sin x - \cos x] - [\cos x - \sin x]e^x}{e^{2x}} = -\frac{2 \cos x}{e^x}.$$

Digitized by Google

(60) $y = \frac{e^x}{\sin x}$. $y' = \frac{\sin x \cdot e^x - e^x \cos x}{\sin^2 x} = \frac{e^x(\sin x - \cos x)}{\sin^2 x}$.

$$y'' = \frac{\sin^2 x\{\sin x \cdot e^x + e^x \cdot \cos x - [e^x \cdot (-\sin x) + e^x \cos x]\} - (\sin x \cdot e^x - e^x \cos x) 2 \sin x \cos x}{\sin^4 x}$$

$$= \frac{e^x(2 - \sin 2x)}{\sin^3 x}.$$

(61) $y = lx \cdot \sin x$. $y' = lx \cos x + \frac{\sin x}{x}$.

$$y'' = -lx \cdot \sin x + \frac{\cos x}{x} + \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$$

$$= \frac{2x \cos x - (1 + x^2 lx) \sin x}{x^2}.$$

(62) $y = e^x \cdot lx \cdot \sin x$.

$$y' = e^x lx \cos x + \sin x \left(\frac{e^x}{x} + e^x lx\right)$$

$$= \frac{e^x[(\sin x + \cos x) x lx + \sin x]}{x}.$$

$$y'' = -e^x lx \sin x + \cos x \left(\frac{e^x}{x} + e^x lx\right)$$

$$+ \frac{x(e^x \cos x + e^x \sin x) - e^x \sin x}{x^2} + \frac{e^x \sin x}{x}$$

$$+ lx(e^x \cos x + e^x \sin x).$$

$$y'' = \frac{e^x[2x \cos x(1 + x lx) + \sin x(2x - 1)]}{x^2}.$$

(63) $y = \cos^2 x = \cos x \cdot \cos x$.

$$y' = -2 \sin x \cos x = -\sin 2x.$$

$$y'' = -2\{-\sin^2 x + \cos^2 x\} = -2 \cos 2x.$$

(64) $y = \sin x \cdot \cos x$. $y' = -\sin^2 x + \cos^2 x = \cos 2x$.

$$y'' = -2 \sin x \cos x - 2 \sin x \cos x = -2 \sin 2x.$$

(65) $y = \sin 2x = 2 \sin x \cos x$. $y' = 2 \cos 2x$.

$$y'' = -4 \sin 2x.$$

(66) $y = x^n \cos x$.

$$y' = x^n \cdot (-\sin x) + \cos x \cdot n x^{n-1} = x^{n-1}(n \cos x - x \sin x).$$

$$y'' = x^n(-\cos x) - \sin x \cdot n x^{n-1} + \cos x \cdot n(n-1) x^{n-2}$$

$$+ n x^{n-1}(-\sin x)$$

$$= x^{n-2}\{[n \cdot (n-1) - x^2] \cos x - 2nx \sin x\}.$$

Digitized by Google

(67) $y = \sin x \cdot \cos x \cdot lx.$

$$y' = \sin x \cos x \cdot \frac{1}{x} + lx \cos 2x = \frac{\sin 2x + 2x\,lx \cos 2x}{2x}.$$

$$y'' = \frac{1}{2}\left\{\frac{x\left[2\cos 2x + 2x\,lx(-2\sin 2x) + \cos 2x\left(2x\frac{1}{x} + 2\,lx\right)\right] - (\sin 2x + 2x\,lx\cos 2x)}{x^2}\right\}.$$

$$y'' = \frac{4x\cos 2x - (4x^2 lx + 1)\sin 2x}{2x^2}.$$

(68) $y = \sin x \cdot \operatorname{tg} x.$

$$y' = \sin x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} + \operatorname{tg} x \cdot \cos x = \frac{\operatorname{tg} x(1+\cos^2 x)}{\cos x} = \frac{\operatorname{tg} x}{\cos x} + \sin x.$$

$$y'' = \frac{\cos x\left\{\operatorname{tg} x(-\sin 2x) + (1+\cos^2 x)\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\right\} - \operatorname{tg} x\cdot(1+\cos^2 x)(-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{2 - \sin^2 x \cos^2 x}{\cos^3 x}.$$

(69) $y = \cos x \cdot \operatorname{cot} x.$

$$y' = \cos x\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right) + \operatorname{cot} x\cdot(-\sin x) = -\frac{\cos x\,(1+\sin^2 x)}{\sin^2 x}.$$

$$y'' = -\frac{\sin^2 x(-\sin x) - \cos x\cdot 2\sin x\cos x}{\sin^4 x} - (-\sin x)$$

$$= \frac{1 + \cos^2 x - \sin^4 x}{\sin^3 x}.$$

(70) $y = \operatorname{tg}^2 x = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} x. \qquad y' = \frac{2\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}.$

$$y'' = 2\left\{\frac{\cos^2 x\cdot\frac{1}{\cos^2 x} - \operatorname{tg} x(-2\sin x\cos x)}{\cos^4 x}\right\} = \frac{2\,(1+2\sin^2 x)}{\cos^4 x}.$$

(71) $y = \operatorname{cot}^2 x = \operatorname{cot} x \cdot \operatorname{cot} x. \qquad y' = -\frac{2\operatorname{cot} x}{\sin^2 x}.$

$$y'' = -2\left\{\frac{\sin^2 x\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right) - \operatorname{cot} x\cdot 2\sin x\cos x}{\sin^4 x}\right\} = \frac{2\,(1+2\cos^2 x)}{\sin^4 x}.$$

(72) $y = x\cdot\operatorname{arctg} x. \qquad y' = \frac{x}{1+x^2} + \operatorname{arctg} x.$

$$y'' = \frac{1+x^2 - x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} + \frac{1}{1+x^2} = \frac{2}{(1+x^2)^2}.$$

Digitized by Google

(73) $y = x \cdot \operatorname{arccot} x. \qquad y' = -\frac{x}{1+x^2} + \operatorname{arccot} x.$

$$y'' = -\frac{1+x^2-x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} - \frac{1}{1+x^2} = -\frac{2}{(1+x^2)^2}.$$

II. Funktionen von Funktionen.

(74) $y = (a+bx)^2. \qquad y' = 2(a+bx)\cdot b. \qquad y'' = 2b^2.$

(75) $y = (a+bx)^n. \qquad y' = n(a+bx)^{n-1}\cdot b.$

$$y'' = n(n-1)(a+bx)^{n-2}\cdot b^2.$$

(76) $y = (a-bx^2)^2.$

$$y' = 2(a-bx^2)(-2bx) = -4abx + 4b^2x^3.$$

$$y'' = -4ab + 12b^2x^2 = 4b(3bx^2 - a).$$

(77) $y = (a+bx^n)^m. \qquad y' = m(a+bx^n)^{m-1}\cdot nbx^{n-1}.$

$$\begin{aligned} y'' &= mnb\{x^{n-1}\cdot(m-1)(a+bx^n)^{m-2}\cdot nbx^{n-1} \\ &\qquad + (a+bx^n)^{m-1}\cdot(n-1)x^{n-2}\} \\ &= mnbx^{n-2}(a+bx^n)^{m-2}\cdot\{(m-1)nbx^n \\ &\qquad + (n-1)(a+bx^n)\}. \end{aligned}$$

(78) $y = \sqrt{a+bx^2}. \qquad y' = \frac{2bx}{2\sqrt{a+bx^2}} = \frac{bx}{\sqrt{a+bx^2}}.$

$$y'' = b\left\{\frac{\sqrt{a+bx^2} - x\frac{bx}{\sqrt{a+bx^2}}}{a+bx^2}\right\} = \frac{ab}{\sqrt{(a+bx^2)^3}}.$$

(79) $y = \sqrt[3]{a+bx^2}. \qquad y' = \frac{2bx}{3\sqrt[3]{(a+bx^2)^2}}.$

(80) $y = \sqrt[3]{(a+bx)^2}. \qquad y' = \frac{2(a+bx)b}{3\sqrt[3]{(a+bx)^4}} = \frac{2b}{3\sqrt[3]{a+bx}}.$

(81) $y = \sqrt[n]{a+bx^m}. \qquad y' = \frac{mbx^{m-1}}{n\sqrt[n]{(a+bx^m)^{n-1}}}.$

(82) $y = \sqrt[n]{(a+bx)^m}.$

$$y' = \frac{m(a+bx)^{m-1}\cdot b}{n\sqrt[n]{(a+bx)^{m(n-1)}}} = \frac{mb\sqrt[n]{(a+bx)^{m-n}}}{n}.$$

(83) $y = \left(\frac{a+bx}{c-dx}\right)^2.$

$$y' = 2\frac{a+bx}{c-dx}\cdot\frac{(c-dx)b-(a+bx)(-d)}{(c-dx)^2} = \frac{2(bc+ad)(a+bx)}{(c-dx)^3}.$$

Digitized by Google

(84) $y = \left(\frac{a+bx}{c-dx}\right)^n.$

$$y' = n\left(\frac{a+bx}{c-dx}\right)^{n-1} \cdot \frac{(c-dx)b+(a+bx)d}{(c-dx)^2} = \frac{n(bc+ad)(a+bx)^{n-1}}{(c-dx)^{n+1}}.$$

(85) $y = \sqrt{\frac{a+bx}{c-dx}}.$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{\frac{a+bx}{c-dx}}} \cdot \frac{(c-dx)b+(a+bx)d}{(c-dx)^2} = \frac{bc+ad}{2(c-dx)\sqrt{(a+bx)(c-dx)}}.$$

(86) $y = \sqrt[n]{\frac{a+bx}{c-dx}}.$

$$y' = \frac{1}{n\sqrt[n]{\left(\frac{a+bx}{c-dx}\right)^{n-1}}} \cdot \frac{(c-dx)b+(a+bx)d}{(c-dx)^2}$$

$$= \frac{bc+ad}{n(a+bx)(c-dx)} \cdot \sqrt[n]{\frac{a+bx}{c-dx}}.$$

(87) $y = \sqrt[n]{\frac{(a+bx)^p}{(c-dx)^q}}.$

$$y' = \frac{1}{n\sqrt[n]{\frac{(a+bx)^{p(n-1)}}{(c-dx)^{q(n-1)}}}} \cdot \frac{(c-dx)^q \cdot p(a+bx)^{p-1} \cdot b - (a+bx)^p \cdot q(c-dx)^{q-1} \cdot (-d)}{(c-dx)^{2q}}.$$

$$y' = \frac{bp(c-dx)+dq(a+bx)}{n} \cdot \sqrt[n]{\frac{(a+bx)^{p-n}}{(c-dx)^{q+n}}}.$$

(88) $y = \sqrt[n]{(a+bx+cx^2+dx^3)^p}.$

$$y' = \frac{p(a+bx+cx^2+dx^3)^{p-1} \cdot (b+2cx+3dx^2)}{n\sqrt[n]{(a+bx+cx^2+dx^3)^{p(n-1)}}}.$$

$$y' = \frac{p(b+2cx+3dx^2) \cdot \sqrt[n]{(a+bx+cx^2+dx^3)^{p-n}}}{n}.$$

(89) $y = e^{a+bx-cx^2}.$ $\qquad y' = e^{a+bx-cx^2} \cdot (b-2cx).$

(90) $y = \sqrt[n]{e^{a-bx+cx^2}}.$

$$y' = \frac{e^{a-bx+cx^2} \cdot (-b+2cx)}{n\sqrt[n]{e^{(a-bx+cx^2)(n-1)}}} = \frac{(2cx-b)\sqrt[n]{e^{a-bx+cx^2}}}{n}.$$

Digitized by Google

(91) $y = e^{\sqrt[n]{a+bx+cx^2}}$. $\quad y' = \dfrac{(b+2cx)\,e^{\sqrt[n]{a+bx+cx^2}}}{n\sqrt[n]{(a+bx+cx^2)^{n-1}}}$.

(92) $y = l(a+bx+cx^2)$. $\quad y' = \dfrac{b+2cx}{a+bx+cx^2}$.

(93) $y = l\sqrt[n]{\dfrac{a+x}{a-x}}$.

$$y' = \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{a+x}{a-x}}} \cdot \frac{1}{n\sqrt[n]{\left(\frac{a+x}{a-x}\right)^{n-1}}} \cdot \frac{(a-x)-(a+x)(-1)}{(a-x)^2} = \frac{2a}{n(a^2-x^2)}.$$

(94) $y = \sin(a+bx-cx^2)$. $\quad y' = (b-2cx)\cos(a+bx-cx^2)$.

(95) $y = \sin(a+bx)\cos(a-bx)$.

$$y' = \sin(a+bx)\cdot[-\sin(a-bx)](-b) + \cos(a-bx)\cos(a+bx)\cdot b = b\cos 2bx.$$

(96) $y = [\sin(a+bx+cx^2)]^p$.

$$y' = p[\sin(a+bx+cx^2)]^{p-1}\cdot\cos(a+bx+cx^2)\cdot(b+2cx).$$

(97) $y = \dfrac{\sin(a+bx)}{\cos(a-bx)}$.

$$y' = \frac{\cos(a-bx)\cdot\cos(a+bx)\cdot b - \sin(a+bx)\,[-\sin(a-bx)]\,(-b)}{\cos^2(a-bx)} = \frac{b\cos 2a}{\cos^2(a-bx)}.$$

(98) $y = \sqrt[p]{\operatorname{tg}(a+bx+cx^2)}$.

$$y' = \frac{1}{p\sqrt[p]{[\operatorname{tg}(a+bx+cx^2)]^{p-1}}} \cdot \frac{1}{[\cos(a+bx+cx^2)]^2}\cdot(b+2cx).$$

$$y' = \frac{2(b+2cx)}{p\sin[2(a+bx+cx^2)]\cdot\sqrt[p]{\cot(a+bx+cx^2)}}.$$

(99) $y = l\cot(a+bx+cx^2)$.

$$y' = \frac{1}{\cot(a+bx+cx^2)} \cdot \frac{-1}{[\sin(a+bx+cx^2)]^2}\cdot(b+2cx).$$

$$y' = -\frac{2(b+2cx)}{\sin[2(a+bx+cx^2)]}.$$

(100) $y = e^{\cot(a+bx)}$. $\quad y' = \dfrac{-b\cdot e^{\cot(a+bx)}}{[\sin(a+bx)]^2}$.

Digitized by Google

(101) $y = \arcsin(a + bx^2)$. $\quad y' = \frac{2bx}{\sqrt{1-(a+bx^2)^2}}$.

(102) $y = e^{\arccos(a^2-x^2)}$.

$$y' = e^{\arccos(a^2-x^2)} \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-(a^2-x^2)^2}} \cdot (-2x) = \frac{2x\, e^{\arccos(a^2-x^2)}}{\sqrt{1-(a^2-x^2)^2}}.$$

(103) $y = \sqrt{\operatorname{arctg}\left(\frac{a+x}{a-x}\right)}$.

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{arctg}\left(\frac{a+x}{a-x}\right)}} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{a+x}{a-x}\right)^2} \cdot \frac{(a-x)-(a+x)(-1)}{(a-x)^2}.$$

$$y' = \frac{a}{2(a^2+x^2)\sqrt{\operatorname{arctg}\left(\frac{a+x}{a-x}\right)}}.$$

(104) $y = l \operatorname{arccot}\left(\frac{ax}{b}\right)$.

$$y' = \frac{1}{\operatorname{arccot}\left(\frac{ax}{b}\right)} \cdot \frac{-1}{1+\left(\frac{ax}{b}\right)^2} \cdot \frac{a}{b} = -\frac{ab}{(b^2+a^2x^2)\operatorname{arccot}\left(\frac{ax}{b}\right)}$$

B. Implizite Funktionen.

(105) $x^3 - y^2(2a-x) = 0$. $\quad \frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 + y^2$.

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -2y(2a-x). \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{3x^2+y^2}{2y(2a-x)}.$$

Aus der Aufgabe folgt

$$y = \sqrt{\frac{x^3}{2a-x}};$$

setzt man diesen Wert in der Lösung ein, oder differenziert man ihn nach x, so erhält man

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(3a-x)\sqrt{x}}{\sqrt{(2a-x)^3}}.$$

(106) $y^2 - 2px = 0$. $\quad \frac{\partial F}{\partial x} = -2p$. $\quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y$.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{p}{y}.$$

Digitized by Google

Aus der Aufgabe folgt

$$y = \sqrt{2px};$$

setzt man diesen Wert in der Lösung ein, oder differenziert man ihn nach x, so erhält man

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{\sqrt{2px}} = \sqrt{\frac{p}{2x}}.$$

(107) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$ $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{2x}{a^2}.$ $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{2y}{b^2}.$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y} = -\frac{bx}{a\sqrt{x^2 - a^2}}.$$

(108) $2x^3 - 3ay^2 = 0.$ $\frac{\partial F}{\partial x} = 6x^2.$ $\frac{\partial F}{\partial y} = -6ay.$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{ay} = \sqrt{\frac{3x}{2a}}.$$

(109) $(x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2) = 0.$

$\frac{\partial F}{\partial x} = 2(x^2+y^2)2x - 2a^2x.$ $\frac{\partial F}{\partial y} = 2(x^2+y^2)2y + 2a^2y.$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x(x^2+y^2) - a^2x}{2y(x^2+y^2) + a^2y}.$$

(110) $(x^2 + y^2 - 2ay)^2 - 4a^2(x^2 + y^2) = 0$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2(x^2 + y^2 - 2ay)2x - 8a^2x.$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2(x^2 + y^2 - 2ay)(2y - 2a) - 8a^2y.$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x[(x^2+y^2-2ay) - 2a^2]}{(x^2+y^2-2ay)(y-a) - 2a^2y}.$$

(111) $y \sin x - x \cos y = 0.$ $\frac{\partial F}{\partial x} = y \cos x - \cos y.$

$\frac{\partial F}{\partial y} = \sin x + x \sin y.$ $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos y - y \cos x}{\sin x + x \sin y}.$

Digitized by Google

Zweites Kapitel.

Anwendung der Differentialrechnung zur Bestimmung der vieldeutigen Symbole.

§ 9.

Die Form $\frac{0}{0}$.

Wenn in einem Bruch Zähler und Nenner Funktionen derselben Variablen sind, wenn also der Bruch die Form $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ hat, so kann der Fall eintreten, daß für einen bestimmten Wert der Variablen, etwa für $x = a$, beide Funktionen gleichzeitig gleich Null werden. Der Bruch $\frac{\varphi(a)}{\psi(a)}$ erhält in diesem Falle die Form $\frac{0}{0}$. Da jede endliche Zahl, mit Null multipliziert, Null gibt, so ist der Wert dieses Bruches scheinbar ganz unbestimmt. Daß diese Vieldeutigkeit nur eine scheinbare ist und der Bruch dennoch einen bestimmten Wert besitzt, erkennen wir durch folgende Betrachtung. Wir fassen $\varphi(a)$ auf als den Grenzwert, dem sich die Funktion $\varphi(a+h)$ bei verschwindendem h nähert; wir setzen also

$$\varphi(a) = \operatorname{Lim}_{h=0} \varphi(a+h);$$

ebenso können wir setzen

$$\psi(a) = \operatorname{Lim}_{h=0} \psi(a+h).$$

Da $\varphi(a)$ und $\psi(a)$ gleich Null sind, also durch ihre Subtraktion nichts geändert wird, so haben wir identisch

$$\frac{\varphi(a)}{\psi(a)} = \operatorname{Lim}_{h=0} \frac{\varphi(a+h)}{\psi(a+h)} = \operatorname{Lim}_{h=0} \frac{\varphi(a+h) - \varphi(a)}{\psi(a+h) - \psi(a)}$$

$$= \operatorname{Lim}_{h=0} \frac{\frac{\varphi(a+h) - \varphi(a)}{h}}{\frac{\psi(a+h) - \psi(a)}{h}} = \frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)}.$$

Digitized by Google

Der Quotient der Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ wird also für denjenigen Wert von x, der beide Funktionen gleichzeitig zu Null macht, gleich dem Quotienten der derivierten Funktionen. Es ist klar, daß, wenn auch $\frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)} = \frac{0}{0}$ sein sollte, $\frac{\varphi''(a)}{\psi''(a)}$ den wahren Wert gibt usf.

Beispiele:

1. Für $x = 7$ wird

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{x^2+3x-70}{x^2+2x-63} = \frac{0}{0},$$

aber

$$\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = \frac{2x+3}{2x+2} = \frac{17}{16}.$$

NB. Hebt man durch $(x-7)$ und setzt dann $x = 7$, so wird

$$\frac{x^2+3x-70}{x^2+2x-63} = \frac{x+10}{x+9} = \frac{17}{16}.$$

2. Für $x = 1$ wird

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{2x^3-3x^2+4x-3}{5x^3-6x+1} = \frac{0}{0},$$

aber

$$\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = \frac{6x^2-6x+4}{10x-6} = \frac{4}{4} = 1.$$

NB. Denselben Wert findet man, wenn man durch $(x-1)$ hebt, bevor man $x = 1$ setzt.

3. Für $x = a$ wird

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{x^n-a^n}{x-a} = \frac{0}{0},$$

aber

$$\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = \frac{nx^{n-1}}{1} = na^{n-1}.$$

NB. Führt man die Division erst aus und setzt alsdann $x = a$, so findet man gleichfalls na^{n-1}.

4. Für $x = 2$ wird

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{l\left(\frac{x^2}{4}\right)+2-x}{2-\sqrt{4x-x^2}} = \frac{0}{0},$$

und auch

Digitized by Google

$$\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = \frac{\frac{2}{x} - 1}{\left(\frac{x-2}{\sqrt{4x-x^2}}\right)} = \frac{0}{0},$$

aber

$$\frac{\varphi''(x)}{\psi''(x)} = \frac{\left(-\frac{2}{x^2}\right)}{\left(\frac{\sqrt{4x-x^2} - \frac{(x-2)(2-x)}{\sqrt{4x-x^2}}}{4x-x^2}\right)} = \frac{\left(-\frac{2}{4}\right)}{\left(\frac{2}{4}\right)} = -1.$$

5. Für $x = 0$ wird

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\sin x}{x} = \frac{0}{0},$$

aber

$$\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = \frac{\cos x}{1} = \cos 0 = 1.$$

NB. Dies ist kein Beweis, sondern nur eine Verifikation, da wir den Satz, daß $\lim_{x=0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ist, bei der Differentiation der Sinusfunktion im § 4, 3 bereits vorausgesetzt haben.

6. Für $x = 0$ wird

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{x^3 \cos x + \sin^3 x}{x^2 \sin x} = \frac{0}{0}$$

und auch

$$\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = \frac{3x^2 \cos x - x^3 \sin x + 3 \sin^2 x \cos x}{2x \sin x + x^2 \cos x} = \frac{0}{0}$$

und auch

$$\frac{\varphi''(x)}{\psi''(x)} = \frac{6x \cos x - 6x^2 \sin x - x^3 \cos x + 6 \sin x \cos^2 x - 3 \sin^3 x}{4x \cos x - x^2 \sin x + 2 \sin x} = \frac{0}{0},$$

aber

$$\frac{\varphi'''(x)}{\psi'''(x)} = \frac{6 \cos x - 18x \sin x - 9x^2 \cos x + x^3 \sin x + 6 \cos^3 x - 21 \sin^2 x \cos x}{6 \cos x - 6x \sin x - x^2 \cos x}$$
$$= \frac{12}{6} = 2.$$

§ 10.

Die Form $\infty - \infty$.

Wenn für einen bestimmten Wert von x, etwa für $x = a$, die Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ beide gleichzeitig unendlich groß werden, so nimmt ihre Differenz $\varphi(a) - \psi(a)$ die Form $\infty - \infty$ an. (Daß der Wert dieses Ausdrucks im allgemeinen

Digitized by Google

nicht etwa gleich Null, sondern vieldeutig ist, macht man sich am einfachsten dadurch klar, daß man von einem Punkte aus eine Gerade zieht und unendlich verlängert denkt. Wählt man auf ihr einen Punkt, so wird sie in einen endlichen und in einen unendlich großen Abschnitt zerlegt. Da man den zweiten Punkt auf ihr beliebig wählen kann, so erkennt man, daß die Differenz zweier unendlicher Größen im allgemeinen unendlich viele Werte haben kann.) Um den wahren Wert zu ermitteln, setzen wir

$$\frac{1}{\varphi(x)} = F(x) \quad \text{und} \quad \frac{1}{\psi(x)} = f(x).$$

Dann müssen $F(x)$ und $f(x)$ für $x = a$ beide gleichzeitig gleich Null werden. Nun ist

$$\varphi(x) - \psi(x) = \frac{1}{F(x)} - \frac{1}{f(x)} = \frac{f(x) - F(x)}{F(x) \cdot f(x)}.$$

Der Bruch $\frac{f(x) - F(x)}{F(x) \cdot f(x)}$ wird aber für $x = a$ die Form $\frac{0}{0}$ erhalten; sein wahrer Wert kann daher durch das im § 9 hergeleitete Verfahren ermittelt werden und stellt gleichzeitig den wahren Wert der Differenz $\varphi(x) - \psi(x)$ für $x = a$ dar.

Beispiele.

1. Für $x = a$ ist

$$\frac{1}{x-a} - \frac{1}{\sin(x-a)} = \infty - \infty.$$

Es ist

$$\frac{1}{x-a} - \frac{1}{\sin(x-a)} = \frac{\sin(x-a) - x + a}{(x-a)\sin(x-a)}.$$

Die Differentiation liefert den Bruch

$$\frac{\cos(x-a) - 1}{(x-a)\cos(x-a) + \sin(x-a)};$$

da auch dieser für $x = a$ zu $\frac{0}{0}$ wird, so differenzieren wir abermals und finden

$$\frac{-\sin(x-a)}{-(x-a)\sin(x-a) + \cos(x-a) + \cos(x-a)}.$$

Dieser Bruch erhält für $x = a$ den Wert $\frac{0}{2} = 0$. Also ist Null der wahre Wert des gegebenen Ausdrucks für $x = a$.

Digitized by Google

2. Für $x = 1$ ist

$$\frac{a}{x-1} - \frac{b}{2x^2-2} = \infty - \infty.$$

Unser Verfahren liefert zuerst den Bruch

$$\frac{2ax^2-2a-bx+b}{2(x^2-1)(x-1)},$$

sodann den Bruch

$$\frac{4ax-b}{2[x^2-1+(x-1)2x]},$$

endlich den Bruch

$$\frac{4a-b}{0}.$$

Also ist ∞ der wahre Wert des gegebenen Ausdrucks für $x = 1$.

3. Für $x = \frac{\pi}{2}$ ist

$$\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{\cos x} = \infty - \infty.$$

Unser Verfahren zeigt, daß für $x = \frac{\pi}{2}$

$$\frac{\cos x - x + \frac{\pi}{2}}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cos x} = \frac{-\sin x - 1}{\cos x - \left(x-\frac{\pi}{2}\right)\sin x} = \frac{-2}{0} = \infty$$

ist.

4. Für $x = 0$ ist

$$\frac{1}{l(x+1)} - \frac{1}{x} = \infty - \infty.$$

Unser Verfahren zeigt, daß für $x = 0$

$$\frac{x-l(x+1)}{x \cdot l(x+1)} = \frac{1-\frac{1}{x+1}}{\frac{x}{x+1}+l(x+1)} = \frac{\frac{1}{(x+1)^2}}{\frac{x+1-x}{(x+1)^2}+\frac{1}{x+1}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

ist.

§ 11.

Die Form $\frac{\infty}{\infty}$.

Wenn die Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ für $x = a$ beide gleichzeitig unendlich groß werden, so nimmt der Bruch $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ die unbestimmte Form $\frac{\infty}{\infty}$ an. Wir haben identisch

Digitized by Google

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\frac{1}{\psi(x)}}{\frac{1}{\varphi(x)}}.$$

Da die rechte Seite für $x = a$ die Form $\frac{0}{0}$ erhält, so können wir die Methode des § 9 anwenden und finden

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\frac{1}{\psi(x)}}{\frac{1}{\varphi(x)}} = \frac{-\frac{\psi'(x)}{[\psi(x)]^2}}{-\frac{\varphi'(x)}{[\varphi(x)]^2}} = \frac{\psi'(x)}{\varphi'(x)} \cdot \left[\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right]^2.$$

Nach Division beider Seiten durch $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ folgt hieraus

$$1 = \frac{\psi'(x)}{\varphi'(x)} \cdot \frac{\varphi(x)}{\psi(x)},$$

und hieraus

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}.$$

Das Verfahren zur Auswertung der Form $\frac{\infty}{\infty}$ ist also dasselbe wie für die Form $\frac{0}{0}$.

Beispiele.

1. Für $x = 0$ wird

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{\infty}{\infty}$$

und

$$\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = \frac{\frac{-1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}}{-\frac{1}{x^2}} = \frac{x^2}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \frac{0}{0}$$

und auch

$$\frac{\varphi''(x)}{\psi''(x)} = \frac{2x}{2\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \frac{0}{0},$$

aber

$$\frac{\varphi'''(x)}{\psi'''(x)} = \frac{1}{-\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = -1.$$

2. Für $x = 1$ wird

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{2 + \frac{3}{lx}}{\cot(x-1)} = \frac{\infty}{\infty} \quad \text{und} \quad \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = \frac{3\sin^2(x-1)}{x[lx]^2} = \frac{0}{0}$$

und auch

Digitized by Google

$$\frac{\varphi''(x)}{\psi''(x)} = \frac{6\sin(x-1)\cos(x-1)}{\frac{2\,x\,lx}{x} + [lx]^2} = \frac{0}{0},$$

aber

$$\frac{\varphi'''(x)}{\psi'''(x)} = \frac{6\cos^2(x-1) - 6\sin^2(x-1)}{\frac{2}{x} + \frac{2\,lx}{x}} = \frac{6}{2} = 3.$$

§ 12.

Die Form $0\cdot\infty$.

Wenn für denselben Wert $x = a$ die Funktion $\varphi(x)$ verschwindet, während die Funktion $\psi(x)$ unendlich groß wird, so erhält das Produkt $\varphi(a)\cdot\psi(a)$ die unbestimmte Form $0\cdot\infty$. Zur Auswertung derselben kann man zwei Wege einschlagen:

1. Wir setzen identisch

$$\varphi(x)\cdot\psi(x) = \frac{\varphi(x)}{\left(\frac{1}{\psi(x)}\right)}.$$

Da der letzte Bruch für $x = a$ die Form $\frac{0}{0}$ annimmt, so kann er nach § 9 behandelt werden.

2. Wir setzen identisch

$$\varphi(x)\cdot\psi(x) = \frac{\psi(x)}{\left(\frac{1}{\varphi(x)}\right)}.$$

Da der letzte Bruch für $x = a$ die Form $\frac{\infty}{\infty}$ annimmt, so kann er nach § 11 behandelt werden.

Man wird denjenigen Weg wählen, der die geringste Rechnung verursacht.

Beispiele.

1. Für $x = 1$ ist $(x-1)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{2}\right) = 0\cdot\infty$. — Wir wählen den ersten Weg und finden

$$(x-1)\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{2}\right) = \frac{x-1}{\cot\left(\frac{\pi x}{2}\right)} = \frac{1}{-\frac{\pi}{2\sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)}} = -\frac{2}{\pi} \text{ für } x = 1.$$

Auf dem zweiten Wege würden wir mehr rechnen müssen, nämlich folgendermaßen:

Digitized by Google

$$\sin x \cdot l\,\mathrm{tg}\,x = \frac{l\,\mathrm{tg}\,x}{\frac{1}{\sin x}} = \frac{\frac{1}{\mathrm{tg}\,x\cos^2 x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}} = \frac{\frac{1}{\sin x\cos x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}} = -\frac{\sin^2 x}{\sin x\cos^2 x}$$

$$= -\frac{\sin x}{\cos^2 x} = -\frac{0}{1} = 0.$$

Also ist $\alpha = 0$, daher $(\mathrm{tg}\,x)^{\sin x} = e^0 = 1$ für $x = 0$.

§ 14.
Die Form ∞^0.

Wenn für den Wert $x = a$ die Funktion $\varphi(x)$ unendlich groß wird, während gleichzeitig die Funktion $\psi(x)$ verschwindet, so nimmt der Ausdruck $[\varphi(x)]^{\psi(x)}$ die unbestimmte Form ∞^0 an. Da

$$[\varphi(x)]^{\psi(x)} = e^{\psi(x)\cdot l\varphi(x)}$$

ist, so kommt es auch in diesem Falle darauf an, den Ausdruck $\psi(x)\cdot l\,\varphi(x)$ für $x = a$ auszuwerten.

Beispiele:

1. Für $x = \frac{\pi}{2}$ wird

$$[\mathrm{tg}\,x]^{x-\frac{\pi}{2}} = \infty^0.$$

Es ist:

$$\left(x-\frac{\pi}{2}\right) l\,\mathrm{tg}\,x = \frac{l\,\mathrm{tg}\,x}{\left(\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}\right)} = \frac{\frac{1}{\mathrm{tg}\,x\cos^2 x}}{-\frac{1}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}} = -\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}{\sin x\cos x}$$

$$= -\frac{2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{-\sin^2 x + \cos^2 x} = \frac{0}{1} = 0.$$

Also ist

$$[\mathrm{tg}\,x]^{x-\frac{\pi}{2}} = e^0 = 1 \text{ für } x = \frac{\pi}{2}.$$

2. Für $x = 0$ wird $[\cot x]^x = \infty^0$. Es ist

$$x\,l\cot x = \frac{l\cot x}{\left(\frac{1}{x}\right)} = \frac{\frac{1}{-\cot x\sin^2 x}}{-\frac{1}{x^2}} = \frac{x^2}{\sin x\cos x}$$

$$= \frac{2x}{-\sin^2 x + \cos^2 x} = \frac{0}{1} = 0.$$

Digitized by Google

Wir werden daher den Ausdruck $\psi(x)\cdot l\varphi(x)$ auszurechnen haben; ist er gefunden, etwa gleich α, so ist auch

$$[\varphi(x)]^{\psi(x)} = e^{\alpha}.$$

Beispiele.

1. Für $x = \frac{\pi}{2}$ wird $[\cos x]^{x-\frac{\pi}{2}} = 0^0$. — Wir untersuchen den Ausdruck $\left(x-\frac{\pi}{2}\right) l\cos x$, der für $x = \frac{\pi}{2}$ die Form $0\cdot\infty$ erhält. Nach § 12 ist

$$\left(x-\frac{\pi}{2}\right) l\cos x = \frac{l\cos x}{\left(\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}\right)} = \frac{-\frac{\sin x}{\cos x}}{-\frac{1}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}} = \frac{\operatorname{tg} x}{\frac{1}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}}$$

$$= \frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}{\cot x} = \frac{2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = \frac{0}{-1} = 0.$$

Also ist $\alpha = 0$, daher $[\cos x]^{x-\frac{\pi}{2}} = e^0 = 1$ für $x = \frac{\pi}{2}$.

2. Für $x = 1$ wird $(x-1)^{lx} = 0^0$. — Es ist

$$lx\cdot l(x-1) = \frac{l(x-1)}{\frac{1}{lx}} = \frac{\frac{1}{x-1}}{-\frac{1}{x\,[lx]^2}} = -\frac{x\,[lx]^2}{x-1}$$

$$= \frac{\frac{2\,x\,lx}{x} + [lx]^2}{1} = \frac{0}{1} = 0$$

Also ist $\alpha = 0$, daher $(x-1)^{lx} = e^0 = 1$ für $x = 1$.

3. Für $x = 1$ wird $[lx]^{x-1} = 0^0$. — Es ist

$$(x-1)\,llx = \frac{llx}{\frac{1}{x-1}} = \frac{\frac{1}{x\,lx}}{-\frac{1}{(x-1)^2}} = -\frac{(x-1)^2}{x\,lx} = -\frac{2(x-1)}{\frac{x}{x}+lx}$$

$$= -\frac{0}{1} = 0.$$

Also ist $\alpha = 0$, daher $[lx]^{x-1} = e^0 = 1$ für $x = 1$.

4. Für $x = 0$ wird $(\operatorname{tg} x)^{\sin x} = 0^0$. — Es ist

Digitized by Google

$$\sin x \cdot l\,\mathrm{tg}\,x = \frac{l\,\mathrm{tg}\,x}{\frac{1}{\sin x}} = \frac{\frac{1}{\mathrm{tg}\,x\cos^2 x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}} = \frac{\frac{1}{\sin x\cos x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}} = -\frac{\sin^2 x}{\sin x\cos^2 x}$$

$$= -\frac{\sin x}{\cos^2 x} = -\frac{0}{1} = 0.$$

Also ist $\alpha = 0$, daher $(\mathrm{tg}\,x)^{\sin x} = e^0 = 1$ für $x = 0$.

§ 14.
Die Form ∞^0.

Wenn für den Wert $x = a$ die Funktion $\varphi(x)$ unendlich groß wird, während gleichzeitig die Funktion $\psi(x)$ verschwindet, so nimmt der Ausdruck $[\varphi(x)]^{\psi(x)}$ die unbestimmte Form ∞^0 an. Da

$$[\varphi(x)]^{\psi(x)} = e^{\psi(x)\cdot l\,\varphi(x)}$$

ist, so kommt es auch in diesem Falle darauf an, den Ausdruck $\psi(x)\cdot l\,\varphi(x)$ für $x = a$ auszuwerten.

Beispiele:

1. Für $x = \frac{\pi}{2}$ wird

$$[\mathrm{tg}\,x]^{x-\frac{\pi}{2}} = \infty^0.$$

Es ist:

$$\left(x-\frac{\pi}{2}\right) l\,\mathrm{tg}\,x = \frac{l\,\mathrm{tg}\,x}{\left(\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}\right)} = \frac{\frac{1}{\mathrm{tg}\,x\cos^2 x}}{-\frac{1}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}} = -\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}{\sin x\cos x}$$

$$= -\frac{2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{-\sin^2 x + \cos^2 x} = \frac{0}{1} = 0.$$

Also ist

$$[\mathrm{tg}\,x]^{x-\frac{\pi}{2}} = e^0 = 1 \text{ für } x = \frac{\pi}{2}.$$

2. Für $x = 0$ wird $[\cot x]^x = \infty^0$. Es ist

$$x\,l\cot x = \frac{l\cot x}{\left(\frac{1}{x}\right)} = \frac{\frac{1}{-\cot x\sin^2 x}}{-\frac{1}{x^2}} = \frac{x^2}{\sin x\cos x}$$

$$= \frac{2x}{-\sin^2 x + \cos^2 x} = \frac{0}{1} = 0.$$

Digitized by Google

Also ist $[\cot x]^x = e^0 = 1$ für $x = 0$.

3. Für $x = 1$ wird

$$\left[\frac{1}{lx}\right]^{x-1} = \infty^0.$$

Es ist

$$(x-1)\cdot l\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{l\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{1}{x-1}\right)} = \frac{\frac{lx\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)}{[lx]^2}}{-\frac{1}{(x-1)^2}} = \frac{(x-1)^2}{x\,lx}$$

$$= \frac{2(x-1)}{\frac{x}{x}+lx} = \frac{0}{1} = 0.$$

Also ist

$$\left[\frac{1}{lx}\right]^{x-1} = e^0 = 1 \text{ für } x = 1.$$

4. Für $x = 0$ wird

$$\left(\frac{1}{x}\right)^x = \infty^0.$$

Es ist

$$x\cdot l\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{l\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{1}{x}\right)} = \frac{\frac{-x}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = x = 0.$$

Also ist

$$\left(\frac{1}{x}\right)^x = e^0 = 1 \text{ für } x = 0.$$

§ 15.

Die Form 1^∞.

Auch in dem Falle, daß für den Wert $x = a$ die Funktion $\varphi(x)$ den Wert 1, die Funktion $\psi(x)$ aber den Wert ∞ annimmt, bekommen wir einen unbestimmten Ausdruck, und zwar von der Form 1^∞. Wiederum handelt es sich um die Bestimmung des Wertes von $\psi(x)\cdot l\varphi(x)$ für $x = a$, da identisch $[\varphi(x)]^{\psi(x)} = e^{\psi(x)\cdot l\varphi(x)}$ ist.

Digitized by Google

Beispiele:

1. Für $x = 1$ wird

$$x^{\left[a+\frac{b}{lx}\right]} = 1^\infty.$$

Es ist

$$\left[a + \frac{b}{lx}\right] \cdot lx = alx + b = b \text{ für } x = 1.$$

Also ergibt sich ohne Differentiation:

$$x^{\left[a+\frac{b}{lx}\right]} = e^b \text{ für } x = 1.$$

2. Für $x = 1$ wird

$$[1 - lx]^{\frac{1}{lx}} = 1^\infty.$$

Es ist

$$\frac{1}{lx} \cdot l[1 - lx] = \frac{l[1-lx]}{lx} = \frac{\frac{-1}{[1-lx]x}}{\frac{1}{x}} = -\frac{1}{1-lx} = -1.$$

Also ist

$$[1 - lx]^{\frac{1}{lx}} = e^{-1} = \frac{1}{e} \text{ für } x = 1.$$

3. Für $x = \frac{\pi}{2}$ wird

$$\left(\frac{2x}{\pi}\right)^{\operatorname{tg} x} = 1^\infty.$$

Es ist

$$\operatorname{tg} x \cdot l\left(\frac{2x}{\pi}\right) = \frac{l\left(\frac{2x}{\pi}\right)}{\cot x} = \frac{\frac{\pi \cdot 2}{2x \cdot \pi}}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = -\frac{\sin^2 x}{x} = -\frac{2}{\pi}.$$

Also ist

$$\left(\frac{2x}{\pi}\right)^{\operatorname{tg} x} = e^{-\frac{2}{\pi}} = \frac{1}{\sqrt[\pi]{e^2}} \text{ für } x = \frac{\pi}{2}.$$

4. Für $x = \frac{\pi}{2}$ wird

$$(\sin x)^{\operatorname{tg} x} = 1^\infty.$$

Es ist

$$\operatorname{tg} x \cdot l \sin x = \frac{l \sin x}{\cot x} = \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = -\cos x \sin x = 0.$$

Also ist

$$(\sin x)^{\operatorname{tg} x} = e^0 = 1 \text{ für } x = \frac{\pi}{2}.$$

Digitized by Google

Drittes Kapitel.

Anwendung der Differentialrechnung zur Bestimmung der Maxima und Minima.

§ 16.

Geometrische Vorbegriffe.

I. In Fig. 5 sei die Funktion $y = f(x)$ dargestellt durch die Kurve $A'\,B'\,C'\,D'$. Es sei $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$, $OD = d$. Augenscheinlich hat die Kurve in den Punkten A' und C' zwei (verschiedene) größte Werte *(Maxima)*, in den Punkten B' und D' zwei (verschiedene) kleinste Werte *(Minima)*. Die Begriffe „Maximum" und „Minimum" sind relativ zu nehmen, denn der Augenschein lehrt, daß ein Minimum (z. B. bei D') größer sein kann als ein Maximum (z. B. bei A'). Ein Maximum findet offenbar in einem solchen Punkte statt (z. B. in A', auch in C'), dessen Ordinate (AA' resp. CC') größer ist, als die Ordinaten der vorhergehenden und der nachfolgenden benachbarten Punkte; ein Minimum tritt in solchen Punkten (B', auch D') ein, deren Ordinaten kleiner sind als die Ordinaten der vorhergehenden und der nachfolgenden benachbarten Punkte. Soll also die Funktion $y = f(x)$ für $x = a$ ein Maximum besitzen,

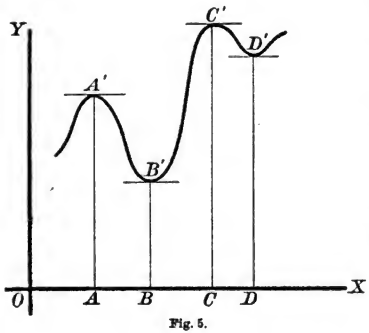


Fig. 5.

Digitized by Google

so muß $f(a-\delta) < f(a) > f(a+\delta)$ sein; soll sie für $x=b$ ein Minimum haben, so muß $f(b-\delta) > f(b) < f(b+\delta)$ sein. Man kann dies auch folgendermaßen ausdrücken: soll im Punkte A ein Maximum stattfinden, so muß die Kurve vorher steigen und nachher fallen; soll im Punkte B ein Minimum stattfinden, so muß die Kurve vorher fallen und nachher steigen.

II. Wann steigt, wann fällt die Kurve $y=f(x)$? Die Kurve steigt, wenn die nächstfolgende Ordinate größer ist als die vorhergehende, d. h. wenn $f(x+\Delta x) > f(x)$ ist oder wenn $f(x+\Delta x) - f(x)$ positiv ist. Sie fällt, wenn die nächstfolgende Ordinate kleiner ist als die vorhergehende, d. h. wenn $f(x+\Delta x) - f(x)$ negativ ist. Dividiert man diese Differenzen durch Δx und geht zur Grenze $\Delta x = 0$ über, so kann man den Satz aufstellen:

Die Kurve $y=f(x)$ steigt, solange

$$\operatorname{Lim}_{\Delta x=0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

positiv bleibt; sie fällt, solange $\frac{dy}{dx}$ negativ bleibt.

III. Soll nun ein Maximum oder ein Minimum im Punkte A eintreten, so muß die Kurve nach I. vor A steigen und nach A fallen oder umgekehrt, d. h. nach II. muß $\frac{dy}{dx}$ vor A das positive, nach A das negative Vorzeichen haben oder umgekehrt. Dieser Wechsel der Vorzeichen kann aber für $\frac{dy}{dx}$ nur dadurch eintreten, daß es im Punkte A den Wert Null besitzt. Wir können daher den Satz aufstellen: Die Funktion $y=f(x)$ besitzt ein Maximum oder Minimum an denjenigen Stellen, in welchen $\frac{dy}{dx} = f'(x) = 0$ ist. — Man kann dies auch an der Fig. 5 erkennen, denn an allen Stellen, wo ein Maximum oder Minimum eintritt, läuft die Tangente mit der x-Achse parallel, also ist der Winkel α, welchen sie mit der x-Achse bildet, gleich Null, also ist $\operatorname{tg}\alpha = 0$. Es war aber nach § 2 $\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx}$; also ist an diesen Stellen $\frac{dy}{dx} = 0$.

Digitized by Google

IV. Hat man nun aus der Gleichung $\frac{dy}{dx} = f'(x) = 0$ diejenigen Werte von x ermittelt, für welche die Funktion $y = f(x)$ ein Maximum oder Minimum besitzt, so muß entschieden werden, ob ein Maximum oder ob ein Minimum statthat. Ein Blick auf die Fig. 5 lehrt, daß ein Maximum nur eintreten kann, wenn die Kurve ihre konkave, ein Minimum nur, wenn sie ihre konvexe Seite nach unten kehrt. Die Kurve kehrt ihre konkave Seite nach unten, zwischen den

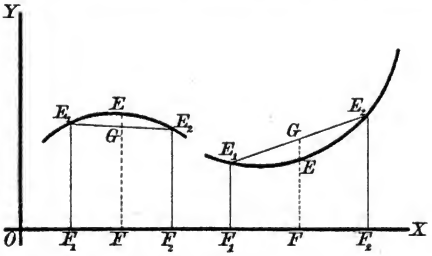


Fig. 6.

Punkten E_1 und E_2 in Fig. 6, wenn die Sehne E_1E_2 zwischen der Kurve und der x-Achse liegt; sie kehrt die konvexe Seite nach unten, wenn sie zwischen der Sehne und der x-Achse liegt. Wenn wir den Halbierungspunkt der Sehne E_1E_2 mit G bezeichnen und den entsprechenden Kurvenpunkt mit E, so muß bei konkaver Krümmung $FE > FG$, bei konvexer Krümmung $FE < FG$ sein oder die Kurve ist konkav nach unten gekrümmt, wenn $FG - FE$ negativ ist; sie ist konvex nach unten gekrümmt, wenn $FG - FE$ positiv ist. — Wir setzen nun in bekannter Weise $OF_1 = x$, $F_1F = FF_2 = \Delta x$. Nach unserer Konstruktion ist FG das arithmetische Mittel zwischen F_1E_1 und F_2E_2, also haben wir die Beziehung:

$$FG - FE = \frac{f(x+2\Delta x)+f(x)}{2} - f(x+\Delta x)$$
$$= \frac{f(x+2\Delta x) - 2f(x+\Delta x)+f(x)}{2}.$$

Digitized by Google

Dieser Ausdruck hat dasselbe Vorzeichen wie

$$\frac{f(x+2\Delta x)-2f(x+\Delta x)+f(x)}{(\Delta x)^2},$$

ein Ausdruck, der beim Übergang zur Grenze $\Delta x = 0$ nach § 6 gleich dem zweiten Differentialquotienten $\frac{d^2y}{dx^2}$ wird. Wir haben also den Lehrsatz: Die Kurve, deren Gleichung $y = f(x)$ ist, kehrt die konkave oder die konvexe Seite nach unten, je nachdem $\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x)$ negativ oder positiv ist. Da nun ein Maximum nur bei konkaver, ein Minimum nur bei konvexer Krümmung eintreten kann, so haben wir zugleich den Lehrsatz gewonnen: Ein aus der Gleichung

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = 0$$

bestimmter Wert von x macht die Funktion $y = f(x)$ zu einem Maximum oder Minimum, je nachdem der zweite Differentialquotient

$$y'' = f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}$$

für diesen Wert von x negativ oder positiv ausfällt.

§ 17.
Beispiele.

1. Welches ist der kleinste Wert, den die Funktion $y = 3x^2 + 6x + 4$ annehmen kann? — Die Gleichung $y' = 6x + 6 = 0$ liefert $x = -1$. Für $x = -1$ wird $y = 1$. Da $y'' = 6$, also positiv ist, so ist $y = 1$ der gesuchte kleinste Wert.

2. Welches sind, abgesehen von $\pm\infty$, die kleinsten resp. größten Werte, die die Funktion

$$y = 2x^3 + 5x^2 + 4x + 1$$

annehmen kann?

Die Gleichung $y' = 6x^2 + 10x + 4 = 0$ liefert $x_1 = -\frac{2}{3}$, $x_2 = -1$, also $y_1 = -\frac{1}{27}$, $y_2 = 0$. Da $y'' = 12x + 10$ für x_1

Digitized by Google

den Wert 2, für x_2 den Wert -2 erhält, so ist $y_1 = -\frac{1}{27}$ ein Minimum, $y_2 = 0$ ein Maximum.

3. Welches sind die kleinsten resp. größten Werte der Funktion $y = \frac{x^4}{4} - 5x^3 + 33x^2 - 80x + 64$? — Die Gleichung $y' = x^3 - 15x^2 + 66x - 80 = 0$ liefert $x_1 = 2$, $x_2 = 5$, $x_3 = 8$; also $y_1 = 0$, $y_2 = \frac{81}{4}$, $y_3 = 0$. Da $y'' = 3x^2 - 30x + 66$ für x_1 den Wert 18, für x_2 den Wert -9, für x_3 den Wert 18 erhält, so sind y_1 und y_3 kleinste Werte, während y_2 ein größter Wert ist.

4. Welches sind die kleinsten resp. größten Werte der Funktion $y = \frac{x^5}{5} - \frac{25}{8}x^3 + 30x^2 - 36x + 1$? — Die Gleichung $y' = x^4 - 25x^2 + 60x - 36 = 0$ liefert $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$, $x_4 = -6$; also $y_1 = -\frac{169}{15}$, $y_2 = -\frac{197}{15}$, $y_3 = -\frac{67}{5}$, $y_4 = \frac{1709}{5}$. Da $y'' = 4x^3 - 50x + 60$ für x_1 den Wert -8, für x_2 den Wert 14, für x_3 den Wert 18, für x_4 den Wert -504 erhält, so sind y_1 und y_4 größte, y_2 und y_3 kleinste Werte.

5. Welches unter allen rechtwinkeligen Dreiecken vom gleichen Umfange $2s$ hat die kleinste Hypotenuse?

Die Hypotenuse sei y, die Katheten a und b, der Winkel zwischen y und b sei x. Wir haben dann die Gleichungen

(1) $a + b + y = 2s$, (2) $a = y \sin x$, (3) $b = y \cos x$.

Setzen wir die Werte aus (2) und (3) in (1) ein, so ist

$$y \sin x + y \cos x + y = 2s,$$

also

(4) $y = \frac{2s}{\sin x + \cos x + 1}$, also (5) $\frac{dy}{dx} = \frac{-2s(\cos x - \sin x)}{(\sin x + \cos x + 1)^2}$;

soll $\frac{dy}{dx} = 0$ sein, so muß also $\cos x = \sin x$, d. h. $x = 45^0$ sein. Aus (5) folgt:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(-2s)\{(\sin x + \cos x + 1)^2(-\sin x - \cos x) - (\cos x - \sin x)2(\sin x + \cos x + 1)(\cos x - \sin x)\}}{(\sin x + \cos x + 1)^4},$$

also für $\sin x = \cos x = \sin 45^0$

$$(6)\quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{4s \cdot \sin 45^0}{(2 \sin 45^0 + 1)^2}.$$

Digitized by Google

Da demnach $\frac{d^2y}{dx^2}$ positiv ist, so haben wir es mit einem Minimum zu tun. Also besitzt unter den Bedingungen der Aufgabe das gleichschenkelige Dreieck die kleinste Hypotenuse.

Die Hypotenuse wird $y = 2s(\sqrt{2} - 1)$, die Katheten $a = b = s(2 - \sqrt{2})$.

Bemerkung. Weit schneller kommen wir hier und stets, wenn die Funktion ein Bruch mit konstantem Zähler ist, auf folgendem Wege zum Ziele. Da allein der Nenner (N) variabel ist, so wird der Bruch ein Maximum oder ein Minimum sein, je nachdem der Nenner ein Minimum oder ein Maximum ist. Wir haben also nur den Nenner $N = \sin x + \cos x + 1$ zu untersuchen. Aus

$$\frac{dN}{dx} = \cos x - \sin x = 0$$

folgt $\sin x = \cos x$, also $x = 45^0$; also ist

$$\frac{d^2N}{dx^2} = -\sin x - \cos x = -2 \sin 45^0 < 0.$$

Also ist für $x = 45^0$ der Nenner ein Maximum, mithin der Bruch ein Minimum usw.

6. Die Summe der Durchmesser dreier Kreise soll gleich $2a$ sein. Der Radius des ersten Kreises soll das n-fache vom Radius des zweiten Kreises sein. Wie groß müssen die Radien gewählt werden, damit die Summe y aller drei Kreisflächen möglichst klein wird? — Die Radien seien x, u, v. Wir haben die Gleichungen:

(1) $y = \pi(x^2 + u^2 + v^2)$. (2) $x + u + v = a$. (3) $x = n \cdot u$.

Setzen wir die aus (2) und (3) folgenden Werte

$$u = \frac{x}{n}, \quad v = a - \frac{n+1}{n}x$$

in (1) ein, so erhalten wir:

$$(4)\ y = \pi\left[x^2 + \frac{x^2}{n^2} + \left(a - \frac{n+1}{n}x\right)^2\right],$$

also

Digitized by Google

$$(5)\quad \frac{dy}{dx} = \pi\left[2x + \frac{2x}{n^2} - 2\left(a - \frac{n+1}{n}x\right)\frac{n+1}{n}\right] = 0,$$

also muß

$$(6)\quad x = \frac{n\cdot(n+1)\cdot a}{(n+1)^2+n^2+1}$$

sein. Da nach (5)

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \pi\left[2 + \frac{2}{n^2} + \frac{2(n+1)^2}{n^2}\right],$$

also positiv ist, so haben wir es mit einem Minimum zu tun. Die beiden anderen Radien sind

$$(7)\quad u = \frac{(n+1)a}{(n+1)^2+n^2+1} \quad \text{und} \quad (8)\quad v = \frac{(n^2+1)a}{(n+1)^2+n^2+1}.$$

Für $2a = 28$ cm und $n = 2$ sind z. B. $x = 6$ cm, $u = 3$ cm, $v = 5$ cm.

7. Über einer gegebenen Strecke $2a$ als Hauptachse soll eine Ellipse so konstruiert werden, daß das Rechteck y aus der halben kleinen Achse x und der halben linearen Exzentrizität e möglichst groß wird.

Wir haben die Gleichungen:

$$(1)\quad y = x\cdot e, \qquad (2)\quad x^2 + e^2 = a^2.$$

Aus (2) folgt $e = \sqrt{a^2 - x^2}$, also wird aus (1):

$$(3)\quad y = x\sqrt{a^2 - x^2},$$

also ist

$$(4)\quad \frac{dy}{dx} = \frac{a^2 - 2x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 0,$$

also muß

$$(5)\quad x = \frac{a}{2}\sqrt{2}$$

sein. Da nach (4)

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\sqrt{a^2-x^2}\cdot(-4x) + (a^2-2x^2)\cdot\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}}{a^2-x^2} = -4$$

für $x = \frac{a}{2}$ ist, so haben wir es mit einem Maximum zu tun. Aus (5) und (2) folgt, daß auch $e = x = \frac{a}{2}\sqrt{2}$ sein muß.

Digitized by Google

8. Zwei gleiche, sich schneidende, entgegengesetzt verlaufende Parabeln vom Parameter $2p$ haben die Achse gemein; ihre Scheitel schneiden aus der Achse die Strecke a heraus. Welches ist der Inhalt z des größten Rechtecks, das in das von den Parabeln abgegrenzte Flächenstück eingeschrieben werden kann?

Wir wählen die Strecke a zur x-Achse und das Lot in ihrem linken Endpunkte zur y-Achse; x und y seien die Koordinaten des linken oberen Eckpunktes des gesuchten Rechtecks. Dann haben wir die Gleichungen:

$$(1)\ z = 2y\,(a - 2x), \quad (2)\ y = \sqrt{2px},$$

also

$$(3)\ z = 2\sqrt{2px}\,(a - 2x) = 2\sqrt{2p}\,(a\sqrt{x} - 2\sqrt{x^3}),$$

also

$$(4)\ \frac{dz}{dx} = 2\sqrt{2p}\left[\frac{a}{2\sqrt{x}} - \frac{3x}{\sqrt{x}}\right] = 0,$$

also muß

$$(5)\ x = \frac{a}{6}$$

sein. Da aus (4) folgt, daß

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -12\sqrt{\frac{3p}{a}},$$

also negativ ist, so haben wir es mit einem Maximum zu tun. Der Inhalt des größten Rechtecks wird $z = \frac{4}{9}a\sqrt{3ap}$. Z. B. ist für $a = 9$ cm, $2p = 6$ cm der Inhalt $z = 36$ qcm.

9. Welcher unter allen geraden Kegeln von gleichem Inhalt J hat den kleinsten Mantel M? Wie groß ist dieser kleinste Mantel?

Wir haben die Gleichungen:

$$(1)\ M = \pi r s, \quad (2)\ \tfrac{1}{3}r^2\pi h = J, \quad (3)\ r^2 + h^2 = s^2.$$

Aus (2) folgt

$$(4)\ h = \frac{3J}{r^2\pi}$$

und damit aus (4):

$$(5)\ s = \sqrt{r^2 + \frac{9J^2}{r^4\pi^2}}.$$

Also erhalten wir:

Digitized by Google

$$(6)\quad M = \pi r \cdot \sqrt{r^2 + \frac{9J^2}{r^4\pi^2}} = \pi \cdot \sqrt{r^4 + \frac{9J^2}{r^2\pi^2}},$$

also

$$(7)\quad \frac{dM}{dr} = \pi \cdot \frac{4r^3 - \frac{29J^2 \cdot r\pi^2}{r^4\pi^4}}{2\sqrt{r^4 + \frac{9J^2}{r^2\pi^2}}} = \frac{2r^6\pi^2 - 9J^2}{r^3\pi^2\sqrt{r^4 + \frac{9J^2}{r^2\pi^2}}} = 0,$$

also muß

$$(8)\quad r = \sqrt[3]{\frac{3J}{\pi\sqrt{2}}}$$

sein. Da aus (7) folgt, daß

$$\frac{d^2M}{dr^2} = 4\sqrt{3} \quad \text{ist für} \quad r = \sqrt[3]{\frac{3J}{\pi\sqrt{2}}},$$

also positiv, so haben wir es mit einem Minimum zu tun. Aus (8) und (4) sowie aus (8) und (5) ergeben sich die Werte:

$$(9)\quad h = \sqrt{2}\sqrt[3]{\frac{3J}{\pi\sqrt{2}}} \quad \text{und} \quad (10)\quad s = \sqrt{3}\sqrt[3]{\frac{3J}{\pi\sqrt{2}}}.$$

Mithin besteht für diesen Kegel die Proportion

$$(11)\quad r^2 : h^2 : s^2 = 1 : 2 : 3.$$

Für den kleinsten Mantel findet man:

$$(12)\quad M = \sqrt{3}\sqrt[3]{\frac{9J^2\pi}{2}}.$$

10. Aus dem Satze von Fermat: „Das Licht bewegt sich stets so, daß es von einem Punkt A nach einem Punkt B in der kürzesten Zeit gelangt", soll das Reflexionsgesetz abgeleitet werden.

Lösung: Der von A (Fig. 7) kommende Lichtstrahl soll den Spiegel MN treffen und dann nach B gelangen. Da dies in der kürzesten Zeit geschehen soll, so muß, da die Geschwindigkeit des Lichtes konstant ist, die Strecke $AD + DB$, die wir mit S bezeichnen, möglichst klein werden. Aus der Fig. 7 folgt:

(1)
$$S = \frac{a}{\cos\alpha} + \frac{b}{\cos\beta}$$

und

(2)
$$a \operatorname{tg}\alpha + b \operatorname{tg}\beta = c.$$

Aus (2) folgt:

Digitized by Google

$$\frac{b\sqrt{1-\cos^2\beta}}{\cos\beta} = c - a \operatorname{tg}\alpha,$$

oder

$$b^2 - b^2\cos^2\beta = (c - a\operatorname{tg}\alpha)^2 \cdot \cos^2\beta,$$

also

$$\cos\beta = \frac{b}{\sqrt{(c-a\operatorname{tg}\alpha)^2 + b^2}}. \tag{3}$$

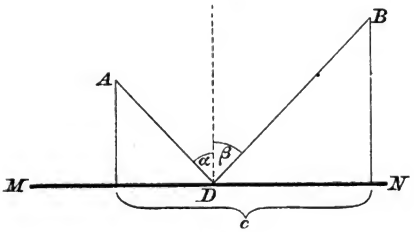


Fig. 7.

Setzen wir den Wert von $\cos\beta$ aus (3) in (1) ein, so folgt:

$$S = \frac{a}{\cos\alpha} + \sqrt{(c - a\operatorname{tg}\alpha)^2 + b^2},$$

also muß

$$\frac{dS}{d\alpha} = \frac{a\sin\alpha}{\cos^2\alpha} - \frac{(c - a\operatorname{tg}\alpha)\cdot a}{\sqrt{(c-a\operatorname{tg}\alpha)^2 + b^2}\cdot\cos^2\alpha} = 0$$

sein, oder

$$\sin\alpha \cdot \sqrt{(c - a\operatorname{tg}\alpha)^2 + b^2} = c - a\operatorname{tg}\alpha,$$

oder

$$(c - a\operatorname{tg}\alpha)^2\sin^2\alpha + b^2\sin^2\alpha = (c - a\operatorname{tg}\alpha)^2,$$

oder

$$(c - a\operatorname{tg}\alpha)^2(1 - \sin^2\alpha) = b^2\sin^2\alpha,$$

oder

$$(c - a\operatorname{tg}\alpha)^2\cos^2\alpha = b^2\sin^2\alpha,$$

oder

$$c - a\operatorname{tg}\alpha = b\operatorname{tg}\alpha,$$

also:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{c}{a+b}. \tag{4}$$

Setzen wir den Wert für $\operatorname{tg}\alpha$ aus (4) in (2) ein, so folgt:

Digitized by Google

$$\frac{ac}{a+b} + b \operatorname{tg} \beta = c,$$

also:

(5) $$\operatorname{tg} \beta = \frac{c}{a+b}.$$

Aus (4) und (5) ergibt sich, daß $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta$, also $\alpha = \beta$ sein muß, d. h. das Reflexionsgesetz: „Der Einfallswinkel ist gleich dem Reflexionswinkel."

Anmerkung. Das Brechungsgesetz des Lichtes kann ähnlich abgeleitet werden.

Viertes Kapitel.

Anwendung der Differentialrechnung zur Untersuchung von ebenen Kurven.

---

§ 18.

Die Gleichung der Tangente.

Aus der analytischen Geometrie ist bekannt, daß die Gleichung derjenigen Geraden, welche durch den Punkt x, y geht und mit der positiven X-Achse den Winkel α bildet, lautet:

(1) $$\eta - y = \operatorname{tg} \alpha (\xi - x),$$

worin ξ und η die laufenden Koordinaten der Geraden bedeuten. Aus § 2 wissen wir, daß, wenn $y = f(x)$ die Gleichung einer ebenen Kurve ist, an welche eine Tangente gelegt wird, für den Winkel α, welchen diese Tangente mit der positiven X-Achse bildet, die Gleichung gilt:

(2) $$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx}.$$

Mithin lautet in ihrer allgemeinen Form die Gleichung der Tangente:

(3) $$\eta - y = \frac{dy}{dx} \cdot (\xi - x).$$

Digitized by Google

Ist also die Aufgabe gestellt, für einen durch seine Koordinaten gegebenen Punkt einer Kurve, deren Gleichung $y = f(x)$ ist, die Gleichung der Tangente aufzustellen, so haben wir zunächst den Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ zu bilden, ihn in Gleichung (3) zu substituieren und alsdann überall für x und y die gegebenen Werte der Koordinaten des Berührungspunktes einzusetzen.

Beispiel: Wie lautet die Gleichung der im Punkte $x = 1$, $y = 7$ an die Kurve $y = 3x^3 + 2x^2 + x + 1$ gelegten Tangente? — Da $\frac{dy}{dx} = 9x^2 + 4x + 1$ ist, so wird zunächst aus Gleichung (3): $\eta - y = (9x^2 + 4x + 1) \cdot (\xi - x)$, also nach Einsetzung der gegebenen Koordinaten des Berührungspunktes: $\eta - 7 = 14(\xi - 1)$ oder $\eta = 14\xi - 7$.

§ 19.

Die Gleichung der Normale.

Da die Normale im Berührungspunkt auf der Tangente senkrecht steht, so werden wir ihre Gleichung nach einem bekannten Satze der analytischen Geometrie aus der Tangentengleichung erhalten, wenn wir den reziproken Wert der Richtungskonstante mit entgegengesetztem Vorzeichen einsetzen. In ihrer allgemeinen Form lautet mithin die Gleichung der Normale:

$$\eta - y = -\frac{dx}{dy}(\xi - x). \tag{1}$$

In dem Beispiel des vorigen Paragraphen würde also die Gleichung der Normale lauten: $\eta - 7 = -\frac{1}{14}(\xi - 1)$ oder $\eta = -\frac{1}{14} \cdot \xi + \frac{99}{14}$.

§ 20.

Subtangente, Länge der Tangente. Subnormale, Länge der Normale.

Unter der „Länge der Tangente“ versteht man das Stück PB (Fig. 8) der Tangente, welches zwischen dem Berührungspunkt P und dem Schnittpunkt B der Tangente mit der X-Achse liegt.

Digitized by Google

Unter der „Subtangente“ versteht man die Projektion AB der „Länge der Tangente“ auf die X-Achse. Da $\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx}$ ist, so folgt aus dem rechtwinkligen Dreieck ABP:

$$AB = \frac{y}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{y}{\left(\frac{dy}{dx}\right)} = y \cdot \frac{dx}{dy},$$

also ist die

(1) $$\text{Subtangente} = y \cdot \frac{dx}{dy}.$$

Aus demselben Dreieck folgt:

$$\overline{BP}^2 = y^2 + \left(y \cdot \frac{dx}{dy}\right)^2 = y^2 \cdot \left[1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right].$$

Also ist die

(2) $$\text{Länge der Tangente} = y \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}.$$

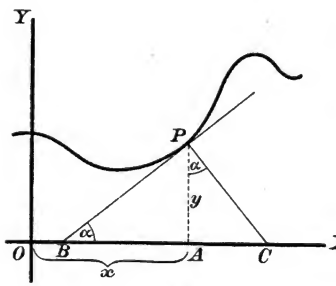


Fig. 8.

Unter der „Länge der Normale“ versteht man das Stück PC der im Berührungspunkt P auf der Tangente lotrechten Normale, welches zwischen dem Berührungspunkt P und dem Schnittpunkt C der Normale mit der X-Achse liegt.

Unter der „Subnormale“ versteht man die Projektion AC der „Länge der Normale“ auf die X-Achse.

Da $\sphericalangle APC = \sphericalangle ABP = \alpha$ und $\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx}$ ist, so folgt aus dem rechtwinkligen Dreieck APC: $AC = y \cdot \operatorname{tg}\alpha = y \cdot \frac{dy}{dx}$. Also ist die

(3) $$\text{Subnormale} = y \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Aus demselben Dreieck folgt:

$$\overline{PC}^2 = y^2 + \left(y \cdot \frac{dy}{dx}\right)^2 = y^2 \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right].$$

Digitized by Google

Also ist die

(4) $$\text{Länge der Normale} = y \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Für das in den vorigen Paragraphen gegebene Beispiel erhalten wir hiernach

(1) $$\text{Länge der Tangente} = y \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = 7 \cdot \sqrt{1 + \left(\tfrac{1}{14}\right)^2}$$
$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{197} = 7{,}02.$$

(2) $$\text{Subtangente} = y \cdot \frac{dx}{dy} = 7 \cdot \tfrac{1}{14} = \tfrac{1}{2} = 0{,}5.$$

(3) $$\text{Länge der Normale} = y \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = 7 \cdot \sqrt{1 + 14^2}$$
$$= 7\sqrt{197} = 98{,}25.$$

(4) $$\text{Subnormale} = y \cdot \frac{dy}{dx} = 7 \cdot 14 = 98.$$

§ 21.

Der Krümmungskreis. Inflexionspunkte.

Zieht man in zwei Kurvenpunkten P_1 und P_2 die Tangenten und die zugehörigen Normalen, so werden sich die letzteren in einem Punkte M schneiden. Je näher P_1 an P_2 heranrückt, desto weniger werden P_1M und P_2M voneinander verschieden sein. Läßt man P_1 und P_2 nahezu zusammenfallen, so darf man annähernd $P_1M = P_2M$ setzen. Schlägt man also um M mit P_1M den Kreis, so wird er mit der Kurve sowohl die Punkte P_1 und P_2, als auch die zu ihnen gehörigen Tangenten gemein haben. Dieser Kreis wird sich also enger an die Kurve anschmiegen als jeder andere Kreis, dessen Mittelpunkt zwar auch auf der Normale P_1M liegt, aber nicht im Punkte M, sondern in irgendeinem anderen Punkte der Normale, der also nur die eine Tangente im Punkte P_1 mit der Kurve gemein hat. Da dieser Kreis in seinem ganzen Verlauf dieselbe Krümmung besitzt, wie die Kurve in den beiden unmittelbar benachbarten Punkten P_1 und P_2, so heißt er der „Krümmungskreis“. Ist sein Radius groß, so können wir schließen, daß die Kurve in diesem

Digitized by Google

Punkte nur schwach gekrümmt ist; je kleiner aber sein Radius ist, desto stärker ist die Kurvenkrümmung in diesem Punkte. Der Radius des Krümmungskreises gibt also ein Maß für die Krümmung der Kurve ab, ein Umstand, der nicht nur in der Wissenschaft, sondern auch in der Technik eine große Rolle spielt, z. B. bei der Anlage von krummen Schienenwegen für Eisenbahnen.

Wir wollen nun die Koordinaten α und β des Schnittpunktes zweier benachbarter Normalen berechnen; lassen wir nachher die beiden Normalen zusammenfallen, so werden α und β die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes.

Nach § 19 ist die Gleichung der Normale

$$\eta - y = -\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)} \cdot (\xi - x).$$

Hierin ist $\frac{dy}{dx}$ eine Funktion von x, die wir mit A bezeichnen wollen. Die Gleichungen der durch die benachbarten Kurvenpunkte $(x_1 y_1)$ und $(x_2 y_2)$ gezogenen Normalen sind demgemäß

$$\eta - y_1 = -\frac{1}{A_1}(\xi - x_1) \quad \text{und} \quad \eta - y_2 = -\frac{1}{A_2}(\xi - x_2).$$

Für den Schnittpunkt (α, β) der beiden Normalen müssen beide Gleichungen erfüllt sein; wir haben daher zur Bestimmung der gesuchten Koordinaten α und β des Schnittpunktes die beiden Gleichungen

$$\beta - y_1 = -\frac{1}{A_1}(\alpha - x_1) \quad \text{und} \quad \beta - y_2 = -\frac{1}{A_2}(\alpha - x_2),$$

oder

$$\alpha - x_1 + A_1(\beta - y_1) = 0, \tag{1}$$

$$\alpha - x_2 + A_2(\beta - y_2) = 0. \tag{2}$$

Wir wollen zuerst β berechnen und deshalb α dadurch eliminieren, daß wir Gleichung (1) von Gleichung (2) subtrahieren; es ergibt sich

$$x_1 - x_2 - \beta(A_1 - A_2) + A_1 y_1 - A_2 y_2 = 0,$$

also

$$\beta(A_1 - A_2) = x_1 - x_2 + A_1 y_1 - A_2 y_2. \tag{3}$$

Digitized by Google

Nun ist bekanntlich

$$A_1 = \frac{dy}{dx} = \operatorname{Lim} \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}.$$

Solange also noch nicht $y_1 = y_2$ und $x_1 = x_2$ sind, ist A_1 von dem Quotienten $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ noch um eine gewisse Größe verschieden, von der wir wissen, daß sie gleich Null wird, sobald $y_1 = y_2$ und $x_1 = x_2$ werden. Nennen wir diese Größe ε, so haben wir

$$A_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} + \varepsilon,$$

woraus folgt

$$y_1 = A_1 (x_1 - x_2) + y_2 - \varepsilon (x_1 - x_2),$$

oder

$$A_1 y_1 = A_1^2 (x_1 - x_2) + A_1 y_2 - \varepsilon A_1 (x_1 - x_2).$$

Setzen wir diesen Wert in Gleichung (3) ein, so entsteht

$$\beta (A_1 - A_2) = x_1 - x_2 + A_1^2 (x_1 - x_2) + A_1 y_2 - \varepsilon A_1 (x_1 - x_2) - A_2 y_2,$$

also ist

$$\beta = \frac{(x_1 - x_2)[1 + A_1^2 - \varepsilon A_1]}{A_1 - A_2} + y_2$$

oder identisch

$$\beta = \frac{1 + A_1 (A_1 - \varepsilon)}{\left(\frac{A_1 - A_2}{x_1 - x_2}\right)} + y_2. \tag{4}$$

Lassen wir nun die beiden Kurvenpunkte $(x_1 y_1)$ und $(x_2 y_2)$ in den einen Punkt (xy) zusammenfallen, so wird $\varepsilon = 0$, $A_1 = A$, $y_2 = y$, und der Differenzenquotient $\frac{A_1 - A_2}{x_1 - x_2}$ wird zum Differentialquotienten $\frac{dA}{dx}$, gerade so, wie im § 2 der Differenzenquotient $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ beim Zusammenfallen der Punkte $(x_1 y_1)$ und $(x_2 y_2)$ zum Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ wurde. Nun war aber $A = \frac{dy}{dx}$, also ist

$$\frac{dA}{dx} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{d^2 y}{dx^2}.$$

Setzen wir diese Werte in Gleichung (4) ein, so erhalten wir für die Ordinate β des Schnittpunktes zweier unendlich naher

Digitized by Google

Normalen, d. h. für die Ordinate des Krümmungsmittelpunktes, die Gleichung

$$\beta = y + \frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)}. \tag{5}$$

Den Wert der zugehörigen Abszisse des Krümmungsmittelpunktes finden wir, wenn wir aus Gleichung (5) den Wert von β in Gleichung (1) einsetzen; er ist

$$\alpha = x - \frac{\frac{dy}{dx}\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)}. \tag{6}$$

Wir haben jetzt noch den Radius des Krümmungskreises zu berechnen. Für einen Kreis mit dem Radius ϱ, dessen Mittelpunktskoordinaten α und β sind, kennen wir aus der analytischen Geometrie die Gleichung

$$\varrho^2 = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2.$$

Ersetzen wir in derselben α und β durch ihre Werte aus den Gleichungen (5) und (6), so erhalten wir

$$\varrho^2 = \frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^2}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2} + \frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^2}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2}$$

$$= \frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^2}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2}\cdot\left[\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+1\right] = \frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^3}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2}.$$

Also ist der Krümmungsradius

$$\varrho = \frac{\sqrt{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^3}}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)}. \tag{7}$$

Für das in den vorigen Paragraphen behandelte Beispiel finden wir

$$\alpha = 1 - \frac{14(1+14^2)}{22} = -124{,}4,$$

Digitized by Google

$$\beta = 7 + \frac{1+14^2}{22} = 15{,}9,$$

$$\varrho = \frac{\sqrt{(1+14^2)^3}}{22} = 125{,}7.$$

Schon im § 16 ist der Satz bewiesen: Die Kurve, deren Gleichung $y = f(x)$ ist, kehrt die konkave oder konvexe Seite nach unten, je nachdem $\frac{d^2y}{dx^2}$ negativ oder positiv ist. Wenn wir festsetzen, daß die Wurzel $\sqrt{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^3}$ im Werte für ϱ stets positiv genommen werden soll, so hängt das Vorzeichen von ϱ nur von $\frac{d^2y}{dx^2}$ ab. Wir können daher auch sagen, daß die Kurve die konkave oder die konvexe Seite nach unten kehrt, je nachdem der Krümmungsradius negativ oder positiv ist. Ist $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, also $\varrho = \infty$, so ändert in diesem Punkte die Kurve ihre Krümmung, ein solcher Punkt heißt deshalb Inflexionspunkt, in ihm springt der Krümmungskreis von der einen Seite der Kurve auf die andere über.

Die Kurve unseres Beispiels wird einen Inflexionspunkt besitzen, wenn $\frac{d^2y}{dx^2} = 18x + 4 = 0$ ist, d. h. im Punkte $x = -\frac{2}{9}$, $y = \frac{205}{243}$.

§ 22.

Die Evolute.

Denken wir uns für alle Punkte einer gegebenen Kurve die Krümmungsmittelpunkte konstruiert, so werden dieselben kontinuierlich aufeinander folgen, also eine neue Kurve bilden. Diese wird die „Evolute“ der gegebenen Kurve genannt, während die letztere in dieser Hinsicht den Namen „Evolvente“ führt. Die im § 21, Gleichung (5) und (6) gefundenen Werte der Koordinaten beziehen sich nur auf einen bestimmten Krümmungsmittelpunkt, nämlich auf den zum Kurvenpunkt (x, y) gehörigen: wir werden eine Gleichung, die für alle Krümmungsmittelpunkte gilt, erhalten, wenn wir uns von der Beschränkung auf den einen Kurvenpunkt (x, y) befreien, wenn wir also x und y aus jenen Gleichungen eliminieren. Die so erhaltene Gleichung ist dann die Gleichung der Evolute.

Digitized by Google

Als Beispiel betrachten wir die Kurve (Parabel), deren Gleichung $y = x^2 + 1$ ist. Es ist

$$\frac{dy}{dx} = 2x, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 2,$$

also:

(1) $\beta = x^2 + 1 + \frac{1 + 4x^2}{2}$, (2) $\alpha = x - \frac{2x(1 + 4x^2)}{2}$.

Aus (2) folgt $x = \sqrt[3]{-\frac{\alpha}{4}}$, aus (1) folgt $6x^2 = 2\beta - 3$, also ist die Gleichung der Evolute

$$6\sqrt[3]{\frac{\alpha^2}{16}} = 2\beta - 3 \text{ oder } 27\alpha^2 = 2(2\beta - 3)^3 \text{ oder}$$
$$27\alpha^2 - 16\beta^3 + 72\beta^2 - 108\beta + 54 = 0.$$

§ 23.

Darstellung der Formeln in Polarkoordinaten.

Ist die Gleichung der zu untersuchenden Kurve in Polarkoordinaten gegeben

$$r = f(\varphi),$$

so werden wir die für rechtwinklige Koordinaten ermittelten Formeln mit Hilfe der bekannten Gleichungen

(1) $x = r \cos \varphi$ und (2) $y = r \sin \varphi$

auf Polarkoordinaten transformieren.

I. Transformation des ersten Differentialquotienten.

Aus (1) und (2) folgen durch Differentiation die Gleichungen

(3) $\frac{dx}{d\varphi} = \frac{dr}{d\varphi} \cos \varphi - r \sin \varphi$ und (4) $\frac{dy}{d\varphi} = \frac{dr}{d\varphi} \sin \varphi + r \cos \varphi$.

Gleichung (4) durch Gleichung (3) dividiert gibt

(5) $$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dr}{d\varphi} \sin \varphi + r \cos \varphi}{\frac{dr}{d\varphi} \cos \varphi - r \sin \varphi}.$$

Digitized by Google

II. Transformation des zweiten Differentialquotienten.

Wir haben identisch

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dx}. \tag{6}$$

Nach Gleichung (5) ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dr}{d\varphi}\sin\varphi + r\cos\varphi}{\frac{dr}{d\varphi}\cos\varphi - r\sin\varphi},$$

also ist

$$\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{d\varphi} = \begin{cases} \dfrac{\left(\frac{dr}{d\varphi}\cos\varphi - r\sin\varphi\right)\left(\frac{d^2r}{d\varphi^2}\sin\varphi + 2\frac{dr}{d\varphi}\cos\varphi - r\sin\varphi\right)}{\left(\frac{dr}{d\varphi}\cos\varphi - r\sin\varphi\right)^2} \\ -\dfrac{\left(\frac{dr}{d\varphi}\sin\varphi + r\cos\varphi\right)\left(\frac{d^2r}{d\varphi^2}\cos\varphi - 2\frac{dr}{d\varphi}\sin\varphi - r\cos\varphi\right)}{\left(\frac{dr}{d\varphi}\cos\varphi - r\sin\varphi\right)^2} \end{cases}$$

oder, wenn ausmultipliziert und zusammengefaßt ist:

$$\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{d\varphi} = \frac{r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\varphi^2}}{\left(\frac{dr}{d\varphi}\cos\varphi - r\sin\varphi\right)^3}. \tag{7}$$

Aus Gleichung (3) folgt:

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{1}{\frac{dr}{d\varphi}\cos\varphi - r\sin\varphi}. \tag{8}$$

Setzt man die Werte von (7) und (8) in (6) ein, so ergibt sich

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\varphi^2}}{\left(\frac{dr}{d\varphi}\cos\varphi - r\sin\varphi\right)^3}. \tag{9}$$

Unter Benutzung der Formeln (1), (2), (5) und (9) ergeben sich nach leichten Rechnungen aus den Formeln (1) bis (4) des § 20 und aus den Formeln (5) bis (7) des § 21 die folgenden neuen Formeln:

Digitized by Google

(1) Länge der Tangente $= \dfrac{r \sin\varphi \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}}{\frac{dr}{d\varphi}\sin\varphi + r\cos\varphi}$.

(2) Länge der Normale $= \dfrac{r \sin\varphi \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}}{\frac{dr}{d\varphi}\cos\varphi - r\sin\varphi}$.

(3) Subtangente $= \dfrac{r \sin\varphi \left(\frac{dr}{d\varphi}\cos\varphi - r\sin\varphi\right)}{\frac{dr}{d\varphi}\sin\varphi + r\cos\varphi}$.

(4) Subnormale $= \dfrac{r \sin\varphi \left(\frac{dr}{d\varphi}\sin\varphi + r\cos\varphi\right)}{\frac{dr}{d\varphi}\cos\varphi - r\sin\varphi}$.

(5) Krümmungsmittelpunktsabszisse α

$$= r\cos\varphi - \frac{\left(\frac{dr}{d\varphi}\sin\varphi + r\cos\varphi\right)\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2\right]}{r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\varphi^2}}.$$

(6) Krümmungsmittelpunktsordinate β

$$= r\sin\varphi + \frac{\left(\frac{dr}{d\varphi}\cos\varphi - r\sin\varphi\right)\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2\right]}{r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\varphi^2}}.$$

(7) Krümmungsradius $\varrho = \dfrac{\sqrt{\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2\right]^3}}{r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\varphi^2}}$.

Als Beispiel benutzen wir die durch die Gleichung (1) $r = a\sin\varphi$ dargestellte Kurve. Es ist

$$\frac{dr}{d\varphi} = a\cos\varphi, \quad \frac{d^2r}{d\varphi^2} = -a\sin\varphi;$$

also erhalten wir

(1) Länge der Tangente $= \dfrac{a\sin^2\varphi\sqrt{a^2\sin^2\varphi + a^2\cos^2\varphi}}{a\cos\varphi\sin\varphi + a\sin\varphi\cos\varphi} = \dfrac{a}{2}\cdot\operatorname{tg}\varphi$,

(2) Länge der Normale $= \dfrac{a\sin^2\varphi\sqrt{a^2\sin^2\varphi + a^2\cos^2\varphi}}{a\cos^2\varphi - a\sin^2\varphi} = \dfrac{a\sin^2\varphi}{\cos 2\varphi}$.

Digitized by Google

(3) Subtangente $= \dfrac{a\sin^2\varphi\,(a\cos^2\varphi - a\sin^2\varphi)}{a\sin\varphi\cos\varphi + a\sin\varphi\cos\varphi} = \dfrac{a}{2}\operatorname{tg}\varphi\cos 2\varphi.$

(4) Subnormale $= \dfrac{a\sin^2\varphi\,(a\sin\varphi\cos\varphi + a\sin\varphi\cos\varphi)}{a\cos^2\varphi - a\sin^2\varphi}$

$= a\sin^2\varphi\cdot\operatorname{tg} 2\varphi.$

(5) Krümmungsmittelpunktsabszisse α

$= a\sin\varphi\cos\varphi - \dfrac{2a\sin\varphi\cos\varphi\,[a^2\sin^2\varphi + a^2\cos^2\varphi]}{a^2\sin^2\varphi + 2a^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi} = 0.$

(6) Krümmungsmittelpunktsordinate β

$= a\sin^2\varphi + \dfrac{(a\cos^2\varphi - a\sin^2\varphi)\,(a^2\sin^2\varphi + a^2\cos^2\varphi)}{a^2\sin^2\varphi + 2a^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi} = \dfrac{a}{2}.$

(7) Krümmungsradius $\varrho = \dfrac{\sqrt{(a^2\sin^2\varphi + a^2\cos^2\varphi)^3}}{a^2\sin^2\varphi + 2a^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi} = \dfrac{a}{2}.$

Aus den letzten drei Werten geht hervor, daß die Kurve überall dieselbe Krümmung besitzt. Sie muß daher ein Kreis sein, dessen Radius gleich dem Krümmungsradius $\frac{a}{2}$ und dessen Mittelpunkt der Krümmungsmittelpunkt ist, also die Koordinaten $x = 0$ und $y = \frac{a}{2}$ besitzt. Dies können wir leicht verifizieren, wenn wir von den Polarkoordinaten mittels der bekannten Transformationsgleichungen

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{und} \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

auf rechtwinklige Koordinaten übergehen. Aus der Kurvengleichung $r = a\sin\varphi$ wird dann die Gleichung $x^2 + y^2 = ay$. Verschieben wir die X-Achse parallel mit sich selbst nach oben um das Stück $\frac{a}{2}$, so haben wir in dieser Gleichung statt y zu setzen $y + \frac{a}{2}$, während x unverändert bleibt. Es entsteht dadurch die Gleichung

$$x^2 + \left(\frac{a}{2} + y\right)^2 = a\left(\frac{a}{2} + y\right) \quad \text{oder} \quad x^2 + y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

d. h. die Mittelpunktsgleichung eines Kreises mit dem Radius $\frac{a}{2}$.

Digitized by Google

§ 24.

Der Kreis.

(1) Mittelpunktsgleichung: $x^2 + y^2 = a^2$.

(2) $$y = \sqrt{a^2 - x^2}.$$

(3) $$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{2\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{x}{y}.$$

(4) $$\frac{d^2y}{dx^2} = (-1)\cdot\frac{\sqrt{a^2-x^2}+\frac{x\cdot 2x}{2\sqrt{a^2-x^2}}}{a^2-x^2} = -\frac{a^2}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}} = -\frac{a^2}{y^3}.$$

(5) Gleichung der Tangente: $\eta - y = -\frac{x}{y}(\xi - x)$ oder

$$\eta y - y^2 = -\xi x + x^2 \quad \text{oder} \quad \eta y + \xi x = x^2 + y^2 = a^2.$$

(6) Gleichung der Normale: $\eta - y = \frac{y}{x}(\xi - x)$ oder

$$\eta x - xy = \xi y - xy \quad \text{oder} \quad \eta x = \xi y \quad \text{oder} \quad \eta = \frac{y}{x}\xi.$$

(7) Länge der Tangente $= y\sqrt{\frac{a^2}{x^2}} = \frac{ay}{x}$.

(8) Länge der Normale $= y\sqrt{\frac{a^2}{y^2}} = a$.

(9) Subtangente $= \frac{y^2}{x}$.

(10) Subnormale $= y\frac{x}{y} = x$.

(11) Krümmungsmittelpunkts-

$$\begin{cases} \text{Abszisse } \alpha = x - \dfrac{-\frac{x}{y}\left[1+\frac{x^2}{y^2}\right]}{-\frac{a^2}{y^3}} = 0, \\ \text{Ordinate } \beta = y + \dfrac{1+\frac{x^2}{y^2}}{-\frac{a^2}{y^3}} = 0. \end{cases}$$

(12) Krümmungsradius $\varrho = \dfrac{\sqrt{\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right)^3}}{-\frac{a^2}{y^3}} = -a$.

Digitized by Google

§ 25.

Die gemeine oder Apollonische Parabel.

(1) Scheitelgleichung $y^2 = 2px$.

(2) $$y = \sqrt{2px}.$$

(3) $$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{p}{2x}} = \frac{y}{2x} = \frac{p}{y}.$$

(4) $$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\sqrt{p}}{2x\sqrt{2x}} = -\frac{\sqrt{2px}}{4x^2} = -\frac{y}{4x^2}.$$

(5) Gleichung der Tangente: $\eta - y = \frac{p}{y}(\xi - x)$ oder

$\eta y - y^2 = p(\xi - x)$ oder $\eta y = 2px + p\xi - px$ oder

$\eta y = p(\xi + x)$.

(6) Gleichung der Normale: $\eta - y = -\frac{y}{p}(\xi - x)$.

(7) Länge der Tangente $= y\sqrt{1 + \frac{2x}{p}} = \sqrt{2px}\sqrt{\frac{p+2x}{p}}$

$= \sqrt{2x(p+2x)} = \sqrt{y^2 + 4x^2}$.

(8) Länge der Normale $= y\sqrt{1 + \frac{p}{2x}} = \sqrt{2px}\sqrt{\frac{2x+p}{2x}}$

$= \sqrt{p(p+2x)} = \sqrt{p^2 + y^2}$.

(9) Subtangente $= y \cdot \frac{2x}{y} = 2x$.

(10) Subnormale $= y \cdot \frac{p}{y} = p$.

(11) Krümmungsmittelpunkts-

$$\begin{cases} \text{Abszisse } \alpha = x - \dfrac{\sqrt{\frac{p}{2x}}\left(1 + \frac{p}{2x}\right)}{-\frac{\sqrt{p}}{2x\sqrt{2x}}} = 3x + p. \\ \text{Ordinate } \beta = y + \dfrac{1 + \frac{p}{2x}}{-\frac{\sqrt{p}}{2x\sqrt{2x}}} = \sqrt{2px} - \dfrac{(2x+p)\sqrt{2x}}{\sqrt{p}} \\ \qquad = -\dfrac{2x\sqrt{2x}}{\sqrt{p}} = -\dfrac{y^3}{p^2}. \end{cases}$$

Digitized by Google

(12) Krümmungsradius ϱ

$$= \frac{\sqrt{\left[1+\frac{p}{2x}\right]^3}}{-\frac{\sqrt{p}}{2x\sqrt{2x}}} = -\frac{\sqrt{(2x+p)^3}}{\sqrt{p}} = -\frac{\sqrt{(y^2+p^2)^3}}{p^2}.$$

(13) Gleichung der Evolute: $27p\beta^2 = 8(\alpha-p)^3$.

Führt man die gewöhnlichen Bezeichnungen x und y statt α und β ein und verschiebt die Y-Achse um das Stück p nach rechts, ohne die X-Achse zu ändern, so lautet diese Gleichung

$$y^2 = \frac{8x^3}{27p}.$$

Setzt man noch $p = \frac{4}{9}a$, so erhält man

$$y^2 = \frac{2x^3}{3a}.$$

Hieraus folgt der Satz: Die Evolute einer gemeinen (Apollonischen) Parabel ist eine semikubische (Neilsche) Parabel (vgl. § 28), deren Konstante $a = \frac{9}{4}p$ ist und deren Scheitel im Abstand p vom Parabelscheitel auf der X-Achse liegt, d. h. der zum Parabelscheitel gehörige Krümmungsmittelpunkt ist.

§ 26.

Die Ellipse.

(1) Mittelpunktsgleichung: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

(2) $$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}.$$

(3) $$\frac{dy}{dx} = -\frac{bx}{a\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{b^2x}{a^2y}.$$

(4) $$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{ab}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}} = -\frac{b^4}{a^2y^3}.$$

(5) Gleichung der Tangente: $\eta - y = -\frac{b^2x}{a^2y}(\xi - x)$ oder

$$\eta a^2y - a^2y^2 = -b^2x\xi + b^2x^2 \text{ oder}$$

$$\frac{x\xi}{a^2}+\frac{\eta y}{b^2} = \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Digitized by Google

(6) Gleichung der Normale: $\eta - y = \frac{a^2 y}{b^2 x}(\xi - x)$.

(7) Länge der Tangente $= y\sqrt{1 + \frac{a^4 y^2}{b^4 x^2}} = \frac{y}{bx}\sqrt{\frac{a^4 y^2}{b^2} + b^2 x^2}$

oder, wenn mittels der Gleichung $b^2 = a^2 - e^2$ die lineare Exzentrizität e eingeführt wird:

$$= \frac{y}{bx}\sqrt{a^4 - e^2 x^2}.$$

(8) Länge der Normale $= y \cdot \sqrt{1 + \frac{b^4 x^2}{a^4 y^2}} = \frac{1}{a^2}\sqrt{a^4 y^2 + b^4 x^2}$

$$= \frac{b}{a^2}\sqrt{\frac{a^4 y^2}{b^2} + b^2 x^2} = \frac{b}{a^2}\sqrt{a^4 - e^2 x^2}.$$

(9) Subtangente $= -\frac{y \cdot a^2 y}{b^2 x} = -\frac{a^2 b^2 - b^2 x^2}{b^2 x} = \frac{x^2 - a^2}{x}$.

(10) Subnormale $= -\frac{y b^2 x}{a^2 y} = -\frac{b^2 x}{a^2}$.

(11) Krümmungsmittelpunkts-

$$\begin{cases} \text{Abszisse } \alpha = x - \dfrac{-\frac{b^2 x}{a^2 y}\left(1 + \frac{b^4 x^2}{a^4 y^2}\right)}{-\frac{b^4}{a^2 y^3}} = \dfrac{(a^2 - b^2)x^3}{a^4}. \\ \text{Ordinate } \beta = y + \dfrac{1 + \frac{b^4 x^2}{a^4 y^2}}{-\frac{b^4}{a^2 y^3}} = \dfrac{(b^2 - a^2)y^3}{b^4} = -\dfrac{(a^2 - b^2)y^3}{b^4}. \end{cases}$$

(12) Krümmungsradius $\varrho = \frac{\sqrt{\left(1 + \frac{b^4 x^2}{a^4 y^2}\right)^3}}{-\frac{b^4}{a^2 y^3}} = -\frac{\sqrt{(a^4 y^2 + b^4 x^2)^3}}{a^4 b^4}$.

(13) Gleichung der Evolute: Aus den Gleichungen (11) folgen die Werte:

$$x = \sqrt[3]{\frac{a^4 \alpha}{a^2 - b^2}} \quad \text{und} \quad y = \sqrt[3]{\frac{b^4 \beta}{-(a^2 - b^2)}},$$

also:

$$\frac{x^2}{a^2} = \sqrt[3]{\frac{a^2 \alpha^2}{(a^2 - b^2)^2}} \quad \text{und} \quad \frac{y^2}{b^2} = \sqrt[3]{\frac{b^2 \beta^2}{(a^2 - b^2)^2}},$$

also durch Addition mit Hilfe der Gleichungen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ und $a^2 - b^2 = e^2$:

$$\sqrt[3]{a^2 \alpha^2} + \sqrt[3]{b^2 \beta^2} = \sqrt[3]{e^4}.$$

Digitized by Google

Auf eine rationale Form kann man diese Gleichung folgendermaßen bringen:

$$a^2\alpha^2 + 3\sqrt[3]{a^4\alpha^4 b^2\beta^2} + 3\sqrt[3]{a^2\alpha^2 b^4\beta^2} + b^2\beta^2 = e^4$$

$$3\sqrt[3]{a^2\alpha^2 b^2\beta^2}\cdot(\sqrt[3]{a^2\alpha^2} + \sqrt[3]{b^2\beta^2}) = e^4 - a^2\alpha^2 - b^2\beta^2$$

$$27\,a^2\alpha^2 b^2\beta^2 e^4 = (e^4 - a^2\alpha^2 - b^2\beta^2)^3$$

$$(a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 - e^4)^3 + 27\,a^2 b^2 e^4\cdot\alpha^2\beta^2 = 0.$$

§ 27.

Die Hyperbel.

(1) Mittelpunktsgleichung: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$

(2) $$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}.$$

(3) $$\frac{dy}{dx} = \frac{bx}{a\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{b^2 x}{a^2 y}.$$

(4) $$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{ab}{\sqrt{(x^2 - a^2)^3}} = -\frac{b^4}{a^2 y^3}.$$

(5) Gleichung der Tangente: $\eta - y = \frac{b^2 x}{a^2 y}(\xi - x)$ oder

$$a^2\eta y - a^2 y^2 = b^2\xi x - b^2 x^2 \text{ oder } \frac{\xi x}{a^2} - \frac{\eta y}{b^2} = 1.$$

(6) Gleichung der Normale: $\eta - y = -\frac{a^2 y}{b^2 x}(\xi - x).$

(7) Länge der Tangente $= y\sqrt{1 + \frac{a^4 y^2}{b^4 x^2}} = \frac{y}{bx}\sqrt{b^2 x^2 + \frac{a^4 y^2}{b^2}}$

oder, da $a^2 + b^2 = e^2$ ist, $= \frac{y}{bx}\sqrt{e^2 x^2 - a^4}.$

(8) Länge der Normale $= y\sqrt{1 + \frac{b^4 x^2}{a^4 y^2}} = \frac{b}{a^2}\sqrt{b^2 x^2 + \frac{a^4 y^2}{b^2}}$

$$= \frac{b}{a^2}\sqrt{e^2 x^2 - a^4}.$$

(9) Subtangente $= y\cdot\frac{a^2 y}{b^2 x} = \frac{x^2 - a^2}{a^2}.$

(10) Subnormale $= y\cdot\frac{b^2 x}{a^2 y} = \frac{b^2 x}{a^2}.$

Digitized by Google

(11) Krümmungsmittelpunkts-

$$\begin{cases} \text{Abszisse } \alpha = x - \dfrac{\dfrac{b^2 x}{a^2 y}\left(1 + \dfrac{b^4 x^2}{a^4 y^2}\right)}{-\dfrac{b^4}{a^2 y^3}} = \dfrac{(a^2+b^2)\,x^3}{a^4}. \\ \text{Ordinate } \beta = y + \dfrac{1 + \dfrac{b^4 x^2}{a^4 y^2}}{-\dfrac{b^4}{a^2 y^3}} = -\dfrac{(a^2+b^2)\,y^3}{b^4}. \end{cases}$$

(12) Krümmungsradius $\varrho = \dfrac{\sqrt{\left(1 + \dfrac{b^4 x^2}{a^4 y^2}\right)^3}}{-\dfrac{b^4}{a^2 y^3}} = -\dfrac{\sqrt{(a^4 y^2 + b^4 y^2)^3}}{a^4 b^4}.$

(13) Gleichung der Evolute: $\sqrt[3]{a^2 a^2} - \sqrt[3]{\beta^2 b^2} = \sqrt[3]{e^4}$ oder
$(\alpha^2 a^2 - \beta^2 b^2 - e^4)^3 - 27\, a^2 b^2 e^4 \cdot \alpha^2 \beta^2 = 0.$

§ 28.

Die semikubische oder Neilsche Parabel.

(1) Gleichung der Kurve: $y^2 = \dfrac{2x^3}{3a}.$

(2) $y = \sqrt{\dfrac{2x^3}{3a}}.$

(3) $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{\dfrac{3x}{2a}} = \dfrac{x^2}{ay}.$

(4) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{\dfrac{3}{8ax}} = \dfrac{x}{2ay}.$

(5) Gleichung der Tangente:

$$\eta - y = \frac{x^2}{ay}(\xi - x).$$

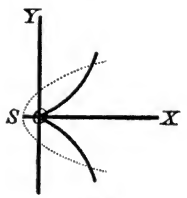


Fig. 9.

Anm. Die punktierte Kurve ist die gemeine Parabel, deren Evolute die Neilsche Parabel ist.
$a = \frac{9}{4} SO = \frac{9}{4} p$. Vgl. § 25.

(6) Gleichung der Normale: $\eta - y = -\dfrac{ay}{x^2}(\xi - x).$

(7) Länge der Tangente $= \dfrac{x}{3}\sqrt{\dfrac{2(2a+3x)}{a}}.$

(8) Länge der Normale $= \dfrac{x}{a}\sqrt{\dfrac{x(2a+3x)}{3}}.$

Digitized by Google

(9) Subtangente $= \frac{2}{3}x$.

(10) Subnormale $= \frac{x^2}{a}$.

(11) Krümmungsmittelpunkts- $\begin{cases} \text{Abszisse } \alpha = -\frac{x(a+3x)}{a}. \\ \text{Ordinate } \beta = \frac{2y(a+2x)}{x}. \end{cases}$

(12) Krümmungsradius $\varrho = \frac{1}{a\sqrt{3}} \cdot \sqrt{x(2a+3x)^3}$.

(13) Gleichung der Evolute: Ersetzt man $\acute{y}$ in (11β) durch $\sqrt{\frac{2x^3}{3a}}$, berechnet x aus (11α), setzt den Wert in (11β) ein und faßt zusammen, so ergibt sich:

$$\beta^2 = \tfrac{4}{81}\left[-a^2 - 36a\alpha + (a-12\alpha)\sqrt{a^2-12a\alpha}\right]$$

oder

$$\beta^2 = \tfrac{4}{81}\left[-a^2 - 36a\alpha + \sqrt{a(a-12\alpha)^3}\right]$$

oder

$$\beta = \tfrac{2}{9}\sqrt{-a^2 - 36a\alpha + \sqrt{a(a-12\alpha)^3}}$$

oder rational:

$$\left[\tfrac{81}{4}\beta^2 + a^2 + 36a\alpha\right]^2 = a(a-12\alpha)^3.$$

§ 29.

Die Cissoide des Diokles.

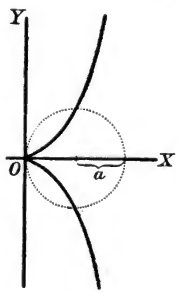


Fig. 10.

Anm. Die punktierte Kurve ist der Erzeugungskreis der Cissoide.

(1) Gleichung der Kurve: $y^2 = \frac{x^3}{2a-x}$.

(2) $$y = \sqrt{\frac{x^3}{2a-x}}.$$

(3) $$\frac{dy}{dx} = \frac{(3a-x)\sqrt{x}}{\sqrt{(2a-x)^3}}.$$

(4) $$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3a^2}{(2a-x)^2\sqrt{x(2a-x)}}.$$

(5) Gleichung der Tangente:

$$\eta - y = \frac{(3a-x)\sqrt{x}}{\sqrt{(2a-x)^3}} \cdot (\xi - x).$$

(6) Gleichung der Normale:

$$\eta - y = -\frac{\sqrt{(2a-x)^3}}{(3a-x)\sqrt{x}} \cdot (\xi - x).$$

Digitized by Google

(7) Länge der Tangente $= \frac{a x \sqrt{8a-3x}}{(3a-x)\sqrt{2a-x}}$.

(8) Länge der Normale $= \frac{a x \sqrt{x(8a-3x)}}{(2a-x)^2}$.

(9) Subtangente $= \frac{x(2a-x)}{3a-x}$.

(10) Subnormale $= \frac{x^2(3a-x)}{(2a-x)^2}$.

(11) Krümmungsmittelpunkts- $\begin{cases} \text{Abszisse } \alpha = -\frac{ax(12a-5x)}{3(2a-x)^2}. \\ \text{Ordinate } \beta = \frac{8a\sqrt{x}}{3\sqrt{2a-x}}. \end{cases}$

(12) Krümmungsradius $\varrho = \frac{a\sqrt{x(8a-3x)^3}}{3(2a-x)^2}$.

(13) Gleichung der Evolute: $27\beta^4 + 1152a^2\beta^2 + 4096a^3\alpha = 0$.

§ 30.
Die gemeine Cykloide.

(1) Gleichung der Kurve: $x = a \cdot \arccos\left(\frac{a-y}{a}\right) - \sqrt{2ay-y^2}$.

(2) $\frac{dx}{dy} = \sqrt{\frac{y}{2a-y}}, \quad \frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2a-y}{y}}$.

(3) $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{a}{y^2}$.

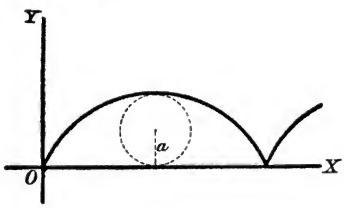


Fig. 11.

Anm. Die punktierte Kurve ist der Erzeugungskreis der Cykloide.

(4) Gleichung der Tangente: $\eta - y = \sqrt{\frac{2a-y}{y}} \cdot (\xi - x)$.

Digitized by Google

(5) Gleichung der Normale: $\eta - y = -\sqrt{\frac{y}{2a-y}} \cdot (\xi - x)$.

(6) Länge der Tangente $= y\sqrt{\frac{2a}{2a-y}}$.

(7) Länge der Normale $= \sqrt{2ay}$.

(8) Subtangente $= y\sqrt{\frac{y}{2a-y}}$.

(9) Subnormale $= \sqrt{y(2a-y)}$.

(10) Krümmungsmittelpunkts- $\begin{cases} \text{Abszisse } \alpha = x + 2\sqrt{y(2a-y)}. \\ \text{Ordinate } \beta = -y. \end{cases}$

(11) Krümmungsradius $\varrho = -2\sqrt{2ay}$.

(12) Gleichung der Evolute: Setzt man den aus $(10, \beta)$ folgenden Wert von y und den aus (1) folgenden Wert von x in $(10, \alpha)$ ein, so erhält man

$$\alpha = a \cdot \arccos\frac{a+\beta}{a} - \sqrt{-2a\beta - \beta^2}.$$

Die Evolute ist also eine der ursprünglichen kongruente Cykloide.

§ 31.

Die Lemniskate.

(1) Gleichung der Kurve

a) in rechtwinkligen Koordinaten: $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$.

b) in Polarkoordinaten: $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$.

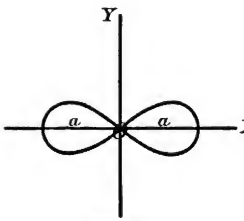


Fig. 12.

(2) $\frac{dr}{d\varphi} = -\frac{a \sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$.

(3) $\frac{d^2r}{d\varphi^2} = -\frac{a(1+\cos^2 2\varphi)}{\cos 2\varphi \sqrt{\cos 2\varphi}}$.

(4) $\frac{dy}{dx} = -\cot 3\varphi$.

(5) $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dx}$

$= \frac{3}{\sin^2 3\varphi} \cdot \frac{-\sqrt{\cos 2\varphi}}{a \sin 3\varphi}$

$= -\frac{3\sqrt{\cos 2\varphi}}{a \sin^3 3\varphi}$.

(6) Gleichung der Tangente: $\eta - y = -\cot 3\varphi \cdot (\xi - x)$.

Digitized by Google

(7) Gleichung der Normale: $\eta - y = \operatorname{tg} 3\varphi \cdot (\xi - x)$.

(8) Länge der Tangente $= \frac{a \sin\varphi \sqrt{\cos 2\varphi}}{\cos 3\varphi}$.

(9) Länge der Normale $= \frac{a \sin\varphi \sqrt{\cos 2\varphi}}{\sin 3\varphi}$.

(10) Subtangente $= a \sin\varphi \operatorname{tg} 3\varphi \sqrt{\cos 2\varphi}$.

(11) Subnormale $= a \sin\varphi \cot 3\varphi \sqrt{\cos 2\varphi}$.

(12) Krümmungsmittelpunkts- $\begin{cases} \text{Abszisse } \alpha = \frac{2a\cos^3\varphi}{3\sqrt{\cos 2\varphi}}. \\ \text{Ordinate } \beta = -\frac{2a\sin^3\varphi}{3\sqrt{\cos 2\varphi}}. \end{cases}$

(13) Krümmungsradius $\varrho = -\frac{a}{3\sqrt{\cos 2\varphi}}$.

(14) Gleichung der Evolute: Durch Division der Gleichungen (12) erhält man $\cot\varphi = \sqrt[3]{-\frac{\alpha}{\beta}}$. Mit Hilfe dieser Gleichung und der goniometrischen Formeln $\cos 2\varphi = 2\cos^2\varphi - 1$ und $\cos^2\varphi = \frac{\cot^2\varphi}{1+\cot^2\varphi}$ und $\sin^2\varphi = \frac{1}{\sqrt{(1+\cot^2\varphi)^3}}$ erhält man aus (12, β) die Evolutengleichung:

$$9\left(\alpha^{\frac{2}{3}} + \beta^{\frac{2}{3}}\right)^2 \cdot \left(\alpha^{\frac{2}{3}} - \beta^{\frac{2}{3}}\right) = 4a^2.$$

§ 32.

Die Kardioide.

(1) Gleichung der Kurve

a) in rechtwinkligen Koordinaten: $(x^2+y^2-2ay)^2 = 4a^2(x^2+y^2)$

b) in Polarkoordinaten: $r = 2a(1 + \sin\varphi)$.

(2) $\sin\varphi = \frac{r-2a}{2a}$,

(3) $\cos\varphi = \frac{1}{2a}\sqrt{4ar - r^2}$.

(4) $\frac{dr}{d\varphi} = 2a\cos\varphi = \sqrt{4ar - r^2}$.

Digitized by Google

(5) $$\frac{d^2r}{d\varphi^2} = -2a\sin\varphi = 2a - r.$$

(6) $$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\sqrt{4ar-r^2}(r-2a)}{2a} + \frac{r\sqrt{4ar-r^2}}{2a}}{\frac{\sqrt{4ar-r^2}\sqrt{4ar-r^2}}{2a} - \frac{r(r-2a)}{2a}} = \frac{(r-a)\sqrt{4ar-r^2}}{r(3a-r)}.$$

(7) $$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{r^2 + 2\sqrt{(4ar-r^2)^2} - r(2a-r)}{\left[\frac{\sqrt{4ar-r^2}\sqrt{4ar-r^2}}{2a} - \frac{r(r-2a)}{2a}\right]^3} = \frac{6a^4}{r^2(3a-r)^3}.$$

(8) Gleichung der Tangente: $\eta - y = \frac{(r-a)\sqrt{4ar-r^2}}{r(3a-r)} \cdot (\xi - x).$

(9) Gleichung der Normale: $\eta - y = \frac{r(r-3a)}{(r-a)\sqrt{4ar-r^2}} \cdot (\xi - x).$

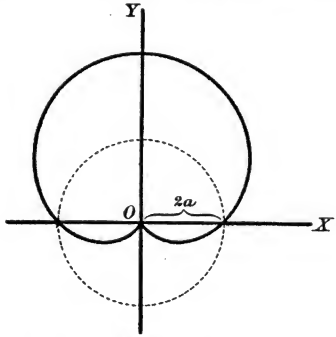


Fig. 13.

Anm. Die punktierte Kurve ist der Erzeugungskreis der Kardioide.

(10) Länge der Tangente $= \frac{r(r-2a)\sqrt{a(4a-r)}}{(r-a)(4a-r)}.$

(11) Länge der Normale $= \frac{(r-2a)\sqrt{ar}}{3a-r}.$

(12) Subtangente $= \frac{r(r-2a)(3a-r)\sqrt{r(4a-r)}}{2a(r-a)(4a-r)}.$

(13) Subnormale $= \frac{(r-a)(r-2a)\sqrt{r(4a-r)}}{2a(3a-r)}.$

Digitized by Google

(14) Krümmungsmittelpunkts- $\begin{cases} \text{Abszisse } \alpha = \dfrac{\sqrt{r\cdot(4a-r)^3}}{6a}. \\ \text{Ordinate } \beta = \dfrac{r(6a-r)}{6a}. \end{cases}$

(15) Krümmungsradius $\varrho = \frac{4}{3}\sqrt{ar}$.

(16) Gleichung der Evolute: Wir quadrieren (14α) und (14β) und addieren:

$$\alpha^2+\beta^2 = \frac{r(4a-r)^3+r^2(6a-r)^2}{36a^2} = \frac{r(16a-3r)}{9}.$$

Aus (14β) folgt: $r = 3a \pm \sqrt{9a^2-6a\beta}$. Setzen wir diesen Wert ein, so ergibt sich als Evolutengleichung:

$$\alpha^2+\beta^2 = 2a\beta - \tfrac{2}{3}a^2 \mp \tfrac{2}{3}a\sqrt{9a^2-6a\beta}.$$

Lassen wir die Y-Achse ungeändert, verschieben aber die X-Achse um das Stück $\frac{4}{3}a$ nach oben, so haben wir statt β zu setzen $\frac{4}{3}a+\beta$. Rechnen wir nun die positiven Ordinaten nach unten, die negativen nach oben, so haben wir statt β zu setzen $\frac{4}{3}a-\beta$. Dies gibt:

$$\alpha^2+(\tfrac{4}{3}a-\beta)^2-2a(\tfrac{4}{3}a-\beta)+\tfrac{2}{3}a^2 = \mp\tfrac{2}{3}a\sqrt{9a^2-6a(\tfrac{4}{3}a-\beta)}$$

oder $$\alpha^2+\beta^2-\tfrac{2}{3}a\beta-\tfrac{2}{9}a^2 = \mp\sqrt{a^2+6a\beta}$$

oder

$$[\alpha^2+\beta^2-\tfrac{2}{3}a\beta]^2+\tfrac{4}{81}a^4-\tfrac{4}{9}a^2(\alpha^2+\beta^2-\tfrac{2}{3}a\beta) = \tfrac{4}{81}a^2(a^2+6a\beta)$$

oder endlich $$[\alpha^2+\beta^2-\tfrac{2}{3}a\beta]^2 = \tfrac{4}{9}a^2(\alpha^2+\beta^2).$$

Vergleichen wir diese Gleichung mit der Kardioidengleichung $[x^2+y^2-2ay]^2 = 4a^2(x^2+y^2)$, so erkennen wir, daß auch die Evolute der Kardioide wieder eine Kardioide ist; ihr Scheitel liegt um $\frac{4}{3}a$ senkrecht über dem Scheitel der ursprünglichen Kardioide, ihr Verlauf ist dem der ursprünglichen Kardioide entgegengesetzt.

Digitized by Google

Zweiter Teil.

Integralrechnung.

Fünftes Kapitel.

Begriff des Integrals. Integrationsmethoden.

§ 33.

Zusammenhang zwischen Differential- und Integral-Funktion.

Wenn eine Funktion $y = f(x)$ gegeben ist, so haben wir in der Differentialrechnung gelernt, den Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ auszurechnen, und gefunden, daß derselbe gleichfalls eine Funktion von x ist, die wir die „abgeleitete Funktion" nannten und mit $y' = f'(x)$ bezeichneten. Wir wandten für dies Verhältnis die symbolischen Gleichungen an:

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x) \quad \text{oder} \quad df(x) = f'(x)dx.$$

Es liegt nahe, die Aufgabe umzukehren und zu fragen: „Wenn eine Funktion $y' = f'(x)$ gegeben ist, von welcher Funktion $f(x)$ ist sie die derivierte Funktion?" Wir wissen z. B., daß, wenn die ursprüngliche Funktion $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ gegeben ist, die abgeleitete Funktion $y' = f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ ist. In diesem Beispiel würde also die Lösung der neuen Aufgabe darin bestehen, daß wir sagen: „Diejenige Funktion, von welcher die gegebene Funktion $y' = f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

Digitized by Google

die abgeleitete ist, heißt $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.“ Man nennt diese Funktion $f(x)$ das Integral der Funktion $f'(x)$ und wendet dafür das Zeichen $\int$ an. Weil also

$$3ax^2 + 2bx + c = \frac{d(ax^3 + bx^2 + cx + d)}{dx}$$

oder

$$(3ax^2 + 2bx + c)\,dx = d(ax^3 + bx^2 + cx + d)$$

ist, so ist:

$$\int (3ax^2 + 2bx + c)\,dx = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Allgemein: Wenn

$$\varphi(x) = \frac{d\psi(x)}{dx}, \quad \text{oder} \quad \varphi(x)\,dx = d\psi(x)$$

ist, so ist

$$\int \varphi(x)\,dx = \psi(x).$$

Aus diesem Begriff des Integrals folgt ohne weiteres: wenn man eine Funktion erst differenziert und dann integriert oder erst integriert und dann differenziert, so bleibt sie unverändert; — oder: Differentiation und Integration an derselben Funktion nacheinander vollzogen heben sich gegenseitig auf; — oder: Differentialzeichen und Integralzeichen vernichten sich gegenseitig,

$$\int du = d \int u = u.$$

Der Vollständigkeit halber müssen wir zu dem Integral einer Funktion noch eine beliebige Konstante C addieren, also z. B. schreiben:

$$\int 2x\,dx = x^2 + C.$$

Denn wenn wir beide Seiten differenzieren, so ergibt sich

$$d \int 2x\,dx = d(x^2) + dC.$$

Nun ist aber nach § 3 $dC = 0$, also folgt

$$2x\,dx = 2x\,dx.$$

Digitized by Google

Differenzieren und Integrieren sind also umgekehrte, „inverse" Operationen; wo sind in ähnlichem Verhältnis stehende Operationen schon in früheren Teilen der Mathematik angetroffen?

§ 34.
Grundformeln.

Nach dem Gesagten ist klar, daß jede Differentialformel auch eine Integralformel liefert. Da z. B.

$$d\left(\frac{x^{m+1}}{m+1}\right) = x^m\,dx$$

ist, so ist umgekehrt

$$\int x^m\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C.$$

Wir stellen hier die am häufigsten gebrauchten Formeln zusammen; jede derselben ist durch Differentiation beider Seiten leicht als richtig nachzuweisen.

(1) $\int x^m\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C.$ — Es muß $m \gtrless (-1)$ sein.

(2) $\int (a+bx)^m\,dx = \frac{(a+bx)^{m+1}}{(m+1)\,b} + C.$ —
Bedingung wie oben.

(3) $\int \frac{dx}{(a+bx)^2} = -\frac{1}{b(a+bx)} + C.$ — Diese Formel geht auch aus (2) hervor, wenn $m = -2$ gesetzt wird.

(4) $\int \frac{dx}{x} = lx + C.$

(5) $\int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b} \cdot l(a+bx) + C.$

(6) $\int \frac{x\,dx}{a+bx^2} = \frac{1}{2b} \cdot l(a+bx^2) + C.$

(7) $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{la} + C.$

(8) $\int e^x\,dx = e^x + C.$

(9) $\int e^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a} + C.$

Digitized by Google

(10) $\int lx\,dx = x\,[lx - 1] + C.$

(11) $\int \frac{dx}{a - bx^2} = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \cdot l\left(\frac{\sqrt{a} + x\sqrt{b}}{\sqrt{a} - x\sqrt{b}}\right) + C.$ —
a und b müssen positiv sein.

(12) $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C.$

(13) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C = -\arccos\left(\frac{x}{a}\right) + C.$

(14) $\int \frac{dx}{\sqrt{a - bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \arcsin\left(\frac{x\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\right) + C.$ —
a und b müssen positiv sein.

(15) $\int \frac{dx}{1 + x^2} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arccot} x + C.$

(16) $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right) + C = -\frac{1}{a} \operatorname{arccot}\left(\frac{x}{a}\right) + C.$

(17) $\int \frac{dx}{a + bx^2} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \operatorname{arctg}\left(\frac{x\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\right) + C.$ —
a und b müssen dasselbe Vorzeichen besitzen.

(18) $\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \cdot l\left\{x\sqrt{b} + \sqrt{a + bx^2}\right\} + C.$ —
b muß positiv sein.

(19) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a + bx^2}} = \frac{1}{b}\sqrt{a + bx^2} + C.$

(20) $\int \frac{dx}{\sqrt{(a + bx^2)^3}} = \frac{x}{a\sqrt{a + bx^2}} + C.$

(21) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(a + bx^2)^3}} = -\frac{1}{b\sqrt{a + bx^2}} + C.$

(22a) $\int \sin x\,dx = -\cos x + C.$

(22b) $\int \sin(mx)\,dx = -\frac{1}{m}\cos(mx) + C.$

(23a) $\int \cos x\,dx = \sin x + C.$

23b) $\int \cos(mx)\,dx = \frac{1}{m}\sin(mx) + C.$

Digitized by Google

(24a) $\int \operatorname{tg} x\, dx = -l \cos x + C.$

(24b) $\int \operatorname{tg}(mx)\, dx = -\frac{1}{m} l \cos mx + C.$

(25a) $\int \operatorname{cot} x\, dx = l \sin x + C.$

(25b) $\int \operatorname{cot}(mx)\, dx = \frac{1}{m} l \sin(mx) + C.$

(26) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$

(27) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{cot} x + C.$

(28) $\int \frac{\operatorname{tg} x}{\cos x} dx = \frac{1}{\cos x} + C.$

(29) $\int \frac{\operatorname{cot} x}{\sin x} dx = -\frac{1}{\sin x} + C.$

(30) $\int \frac{dx}{\sin 2x} = \frac{1}{2} l \operatorname{tg} x + C = -\frac{1}{2} l \operatorname{cot} x + C.$

(31) $\int \arcsin(ax) \cdot dx = x \cdot \arcsin(ax) + \frac{1}{a}\sqrt{1-a^2x^2} + C.$

(32) $\int \operatorname{arctg}(ax) \cdot dx = x \cdot \operatorname{arctg}(ax) - \frac{1}{2a} l(1+a^2x^2) + C.$

§ 35.

Integration einer mit einem konstanten Faktor behafteten Funktion.

Regel: Steht unter dem Integralzeichen das Produkt eines konstanten Faktors mit einer Funktion, so kann der konstante Faktor vor das Integralzeichen gesetzt werden.

Beweis: Die Funktion sei $f(x)$, der konstante Faktor a. Nach der Erklärung des Integrals gelten die Gleichungen

$$\int d[af(x)] = af(x) \quad \text{und} \quad a\int df(x) = af(x).$$

Also folgt

$$\int d[af(x)] = a\int df(x).$$

Digitized by Google

Nun ist $d[af(x)] = a\,df(x)$, also folgt

$$\int d[af(x)] = \int a\,df(x) = a\int df(x),$$

oder, wenn $df(x) = \varphi(x)\,dx$ gesetzt wird,

$$\int a\varphi(x)\,dx = a\int \varphi(x)\,dx.$$

Beispiele.

(1) $$\int 3x^2\,dx = 3\int x^2\,dx = \tfrac{3}{3}x^3 + C = x^3 + C.$$

(2) $$\int l(x^2)\,dx = \int 2lx\,dx = 2\int lx\,dx = 2x[lx - 1] + C.$$

cf. § 34, 10.

§ 36.

Integration von Summen und Differenzen.

Lehrsatz: Das Integral der algebraischen Summe mehrerer Funktionen ist gleich der algebraischen Summe der Integrale der einzelnen Funktionen.

Beweis: Es seien $f(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ Funktionen von x, und $f'(x)$, $\varphi'(x)$, $\psi'(x)$ ihre abgeleiteten Funktionen. Nach der Erklärung des Integrals gelten dann die Gleichungen

(1) $$f(x) = \int f'(x)\,dx, \quad \varphi(x) = \int \varphi'(x)\,dx, \quad \psi(x) = \int \psi'(x)\,dx.$$

Nun gilt nach § 3, (4) und (5) für die Differentiation einer algebraischen Summe die Formel

$$\begin{aligned} d[f(x) + \varphi(x) - \psi(x)] &= f'(x)\,dx + \varphi'(x)\,dx - \psi'(x)\,dx \\ &= [f'(x) + \varphi'(x) - \psi'(x)]\,dx. \end{aligned}$$

Wir integrieren beide Seiten und erhalten, da links $\int$ und d sich aufheben,

$$f(x) + \varphi(x) - \psi(x) = \int [f'(x) + \varphi'(x) - \psi'(x)]\,dx.$$

Setzen wir links die Werte aus Gleichung (1) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} &\int f'(x)\,dx + \int \varphi'(x)\,dx - \int \psi'(x)\,dx \\ &\qquad = \int [f'(x) + \varphi'(x) - \psi'(x)]\,dx, \end{aligned}$$

Digitized by Google

oder, wenn beide Seiten vertauscht werden und $f'(x) = F(x)$, $\varphi'(x) = \Phi(x)$, $\psi'(x) = \Psi(x)$ gesetzt wird,

$$(2) \quad \int [F(x) + \Phi(x) - \Psi(x)]\,dx = \int F(x)\,dx + \int \Phi(x)\,dx - \int \Psi(x)\,dx.$$

Beispiele.

$$(1) \quad \int [3x^3 - 2x^2 + x - 1]\,dx = 3\int x^3 dx - 2\int x^2 dx + \int x dx - \int dx = \tfrac{3}{4}x^4 - \tfrac{2}{3}x^3 + \tfrac{x^2}{2} - x + C.$$

$$(2) \quad \int l(ax^2)\,dx = \int [la + l(x^2)]\,dx = \int [la + 2lx]\,dx = \int la\,dx + \int 2lx\,dx = la\int dx + 2\int lx\,dx = xla + 2x[lx - 1] + C.$$

§ 37.

Die sogenannte partielle Integration.

Als Differentiationsformel für ein Produkt haben wir in § 3, 6 kennen gelernt:

$$d(u \cdot v) = u\,dv + v\,du.$$

Durch Integration beider Seiten erhalten wir:

$$\int d(uv) = \int u\,dv + \int v\,du,$$

oder

$$uv = \int u\,dv + \int v\,du,$$

also:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Die Anwendung dieser Formel, welche gestattet, an Stelle eines Integrales ein anderes zu setzen, hat man in wenig treffender Weise als Methode der partiellen Integration bezeichnet. Sie ist dann zu empfehlen, wenn, was häufig der Fall ist, das zweite Integral sich leicht auswerten läßt.

Digitized by Google

Beispiel: $\int x^2 \sin x\,dx.$

Da $d\cos x = -\sin x\,dx$ ist, so können wir setzen:

$$\int x^2 \sin x\,dx = -\int x^2\,d\cos x.$$

Wir betrachten nun x^2 als u und $\cos x$ als v und haben nach obiger Formel

$$\int x^2\,d\cos x = x^2\cos x - \int \cos x\,d(x^2).$$

Nun ist: $d(x^2) = 2x\,dx$, also

$$\int \cos x\,d(x^2) = 2\int x\cos x\,dx.$$

Da $\cos x\,dx = d\sin x$ ist, so folgt:

$$\int x\cos x\,dx = \int x\,d\sin x.$$

Hierauf wenden wir abermals die Methode der partiellen Integration an, indem wir jetzt x als u und $\sin x$ als v betrachten, und finden:

$$\int x\,d\sin x = x\sin x - \int \sin x\,dx.$$

Aus Grundformel (22a) wissen wir, daß

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

ist. Setzen wir diese Werte ein, so ergibt sich:

$$\int x^2 \sin x\,dx = -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C.$$

§ 38.

Integration durch Einführung neuer Veränderlicher.

Nicht selten wird man ein vorgelegtes Integral dadurch leichter auswerten können, daß man an Stelle der darin enthaltenen Variablen eine neue Veränderliche einführt. Allgemein läßt sich der Gang dieses Verfahrens folgendermaßen darstellen. Es sei das Integral

Digitized by Google

(1) $$\int F[f(x)]\,dx$$

auszuwerten. Wir setzen:

(2) $$f(x) = y$$

und lösen diese Gleichung nach x auf, so daß wir eine Gleichung von der Form $x = \varphi(y)$ erhalten. Differenzieren wir diese nach y, so bekommen wir:

(3) $$dx = \varphi'(y)\,dy.$$

Nun setzen wir die Werte von $f(x)$ und dx aus den Gleichungen (2) und (3) in dem vorgegebenen Integral (1) ein und finden:

(4) $$\int F[f(x)]\,dx = \int F(y)\cdot\varphi'(y)\,dy.$$

Beispiele:

(1) $$\int \frac{x\,dx}{1-a^2x^2}.$$

Wir setzen $1 - a^2x^2 = z$, also $-2a^2x\,dx = dz$ oder $x\,dx = -\frac{dz}{2a^2}$. Setzen wir diese Werte oben ein, so entsteht

$$\int \frac{x\,dx}{1-a^2x^2} = \int \frac{-dz}{2a^2 z} = -\frac{1}{2a^2}\int \frac{dz}{z} = -\frac{1}{2a^2} lz + C$$
$$= -\frac{1}{2a^2} l(1-a^2x^2) + C.$$

(2) $$\int \cos x\, l \sin x\,dx.$$

Wir setzen $\sin x = z$, also $x = \arcsin z$, also $dx = \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$, $\cos x = \sqrt{1-z^2}$. Setzen wir diese Werte oben ein, so entsteht

$$\int \cos x\, l \sin x\,dx = \int \frac{\sqrt{1-z^2}\cdot lz\,dz}{\sqrt{1-z^2}} = \int lz\,dz$$
$$= z[lz - 1] + C = \sin x[l \sin x - 1] + C.$$

§ 39.

Unbestimmte und bestimmte Integrale.

Haben wir ermittelt, daß $F(x)$ das Integral von $f(x)\,dx$ ist und legen wir nun der Veränderlichen x einen oder mehrere bestimmte Werte bei, z. B. $x = a$ und $x = b$, so ist:

Digitized by Google

für $x = a$ $\qquad \int f(x)\,dx = F(a) + C,$

für $x = b$ $\qquad \int f(x)\,dx = F(b) + C.$

Subtrahieren wir die erste von der zweiten Gleichung, so fällt die Konstante fort und wir erhalten:

$$\int\limits_{(x=b)} f(x)\,dx - \int\limits_{(x=a)} f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Diese Differenz nennt man „das von $x = a$ bis $x = b$ genommene Integral von $f(x)\,dx$“, oder „das bestimmte Integral von $f(x)\,dx$, genommen von $x = a$ bis $x = b$“ und bezeichnet es mit

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Im Gegensatz hierzu heißen die bisher betrachteten Integrale, in denen eine willkürlich zu wählende Konstante auftrat, „unbestimmte Integrale“.

Beispiele:

(1) $$\int\limits_1^2 \frac{dx}{x} = l\,2 - l\,1 = l\,2.$$

(2) $$\int\limits_0^{\frac{1}{b}} (a + bx)^3\,dx = \frac{\left(a + b\cdot\frac{1}{b}\right)^3}{3b} - \frac{(a + b\cdot 0)^3}{3b} = \frac{3a^2 + 3a + 1}{3b}.$$

(3) $$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin 1 - \arcsin 0 = \frac{\pi}{2}.$$

(4) $$\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x\,dx = \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 - 1 = -2.$$

Digitized by Google

Sechstes Kapitel.

Anwendung der Integralrechnung zur Quadratur krummlinig begrenzter ebener Flächen.

§ 40.

Quadraturen in rechtwinkligen Koordinaten.

Die Fläche $OAPB$ in Fig. 14, welche von den Koordinatenachsen, der Ordinate AP und dem Bogen BP der durch die Gleichung $y = f(x)$ dargestellten Kurve begrenzt wird, soll mit F bezeichnet werden. Wächst die Abszisse $x = OA$ um das Stück $AA_1 = \Delta x$, so wächst die Fläche um das Stück $AA_1P_1P = \Delta F$. Ist Δx sehr klein, so kann dieser Flächenzuwachs ΔF als ein Rechteck betrachtet werden, dessen Grundlinie Δx und dessen Höhe eine zwischen den Ordinaten AP und A_1P_1 gelegene mittlere Ordinate RS ist. Es ist dann

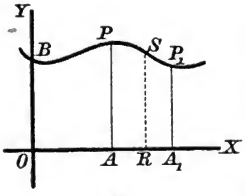


Fig. 14.

$$\Delta F = \overline{RS} \cdot \Delta x \quad \text{oder} \quad \frac{\Delta F}{\Delta x} = RS.$$

Beim Übergang zur Grenze wird hieraus:

$$\frac{dF}{dx} = y,$$

also

$$\int dF = \int y\,dx + C$$

oder

$$F = \int y\,dx + C.$$

Digitized by Google

Die Konstante C wird durch die Bedingungen der speziellen Aufgabe bestimmt. In unserem Falle wird z. B. $F = 0$ für $x = 0$; daher bestimmt sich die Konstante C in diesem Falle durch die Gleichung

$$\int f(0)\,dx + C = 0,$$

woraus folgt:

$$C = -\int f(0)\,dx,$$

d. h. wir rechnen $\int f(x)\,dx$ aus, setzen in dem gefundenen Werte desselben $x = 0$, geben dem so erhaltenen Werte das entgegengesetzte Vorzeichen und setzen ihn gleich C.

Soll der zwischen der X-Achse, den beiden Ordinaten AP und BQ in Fig. 15, für welche $x = a$ resp. $x = b$ ist, und dem Kurvenbogen PQ gelegene Flächenteil berechnet werden, so ist derselbe als Differenz der Flächen $OBQR$ und $OAPR$ anzusehen, also ist

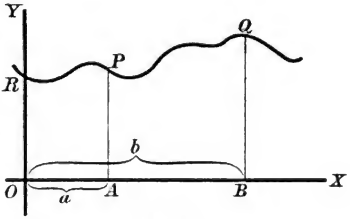


Fig. 15.

$$ABPQ = \int_{(x=b)} f(x)\,dx - \int_{(x=a)} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

§ 41.

Quadraturen in Polarkoordinaten.

Die Fläche des Sektors AOB in Fig. 16, welche von der Koordinatenachse OA, dem Radiusvektor OB und dem Bogen AB der durch die Gleichung $r = f(\varphi)$ dargestellten Kurve begrenzt wird, soll mit S bezeichnet werden. Wächst der Winkel φ um den Winkel $BOB^1 = \Delta\varphi$, so wächst der Sektor

Digitized by Google

um die Fläche $BOB^1 = \Delta S$. Ist $\Delta\varphi$ sehr klein, so kann dieser Sektorzuwachs als ein Kreissektor betrachtet werden, der zum Zentriwinkel $\Delta\varphi$ und einem mittleren Radius OC gehört. Der Inhalt dieses Kreissektors ist aber nach einer aus den Elementen bekannten Formel

$$\Delta S = \frac{1}{2}\overline{OC}^2 \cdot \Delta\varphi$$

oder

$$\frac{\Delta S}{\Delta\varphi} = \frac{1}{2}\overline{OC}^2.$$

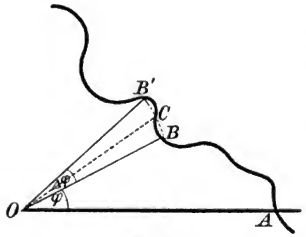


Fig. 16.

Beim Übergang zur Grenze wird hieraus

$$\frac{dS}{d\varphi} = \frac{1}{2}r^2,$$

also

$$S = \frac{1}{2}\int r^2 d\varphi + C.$$

Die Konstante C wird wie im vorigen Paragraphen bestimmt.

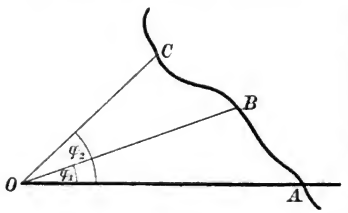


Fig. 17.

Soll derjenige Sektor BOC in Fig. 17 berechnet werden, welcher von dem Kurvenbogen BC und den beiden zu den Anomalien φ_1 und φ_2 gehörigen Vektoren OB und OC begrenzt wird, so ist derselbe als Differenz der Sektoren AOC und AOB anzusehen, also ist nach unseren Erörterungen über bestimmte Integrale

$$\text{Sektor } BOC = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 d\varphi.$$

Digitized by Google

§ 42.

Quadratur der gemeinen Parabel.

Aus der Scheitelgleichung $y^2 = 2px$ folgt $y = \sqrt{2px}$. Mithin ist

$$F = \int \sqrt{2px}\,dx = \sqrt{2p}\int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{\sqrt{2p}\,x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C$$

$$= \tfrac{2}{3}\sqrt{2px^3} + C = \tfrac{2}{3}x\sqrt{2px} + C = \tfrac{2}{3}xy + C.$$

Da für $x = 0$ auch $F = 0$ sein muß, so muß auch $C = 0$ sein. Wir haben daher den Satz: Der Inhalt derjenigen Fläche, die von der Parabelachse, einer Ordinate und dem zugehörigen, vom Scheitel beginnenden Parabelbogen begrenzt wird, ist gleich zwei Dritteln des Rechtecks aus Abszisse und Ordinate.

Aufgabe: Auf der Parabelachse sind in den Punkten $x = 2p$ und $x = \frac{p}{2}$ die Lote errichtet und nach beiden Seiten verlängert. Aus dem von diesen Loten gebildeten Parallelstreifen schneidet die Parabel ein Flächenstück F aus. Wie groß ist dasselbe?

Lösung: $F = \sqrt{2p}\int_{\frac{p}{2}}^{2p} \sqrt{x}\,dx = \frac{14}{3}p^2$.

§ 43.

Quadratur des Kreises.

Aus der Mittelpunktsgleichung $x^2 + y^2 = r^2$ folgt

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}.$$

Mithin ist

$$F = \int \sqrt{r^2 - x^2}\,dx.$$

Durch partielle Integration erhalten wir

$$(1) \qquad \int \sqrt{r^2 - x^2}\,dx = x\cdot\sqrt{r^2 - x^2} - \int \frac{x\cdot(-x)}{\sqrt{r^2 - x^2}}\,dx$$

$$= x\sqrt{r^2 - x^2} + \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Digitized by Google

Nun ist

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{r^2-x^2}} = \int \frac{(x^2-r^2+r^2)\,dx}{\sqrt{r^2-x^2}} = -\int \sqrt{r^2-x^2}\,dx + r^2 \int \frac{dx}{\sqrt{r^2-x^2}}.$$

Dies in Gleichung (1) eingesetzt gibt

$$\int \sqrt{r^2-x^2}\,dx = x\sqrt{r^2-x^2} - \int \sqrt{r^2-x^2}\,dx + r^2 \int \frac{dx}{\sqrt{r^2-x^2}},$$

oder

$$(2) \qquad \int \sqrt{r^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left\{x\sqrt{r^2-x^2} + r^2 \int \frac{dx}{\sqrt{r^2-x^2}}\right\}.$$

Nun ist nach Grundformel (13)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{r^2-x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{r}\right) + C.$$

Setzen wir dies in Gleichung (2) ein, so erhalten wir

$$F = \int \sqrt{r^2-x^2}\,dx = \frac{x\sqrt{r^2-x^2}}{2} + \frac{r^2}{2}\arcsin\left(\frac{x}{r}\right) + C.$$

Wird die Fläche von der X-Achse aus gerechnet, so muß für $x = 0$ auch $F = 0$, also auch $C = 0$ sein. Für den Viertelskreis erhalten wir

$$\text{Quadrant} = \int_0^r \sqrt{r^2-x^2}\,dx = \frac{r\sqrt{r^2-r^2}}{2} + \frac{r^2}{2}\arcsin\left(\frac{r}{r}\right) - 0$$

$$= \frac{r^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{r^2\pi}{4};$$

also ist der Inhalt des ganzen Kreises gleich $r^2\pi$.

§ 44.

Quadratur der Ellipse.

Aus der Mittelpunktsgleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ folgt

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2},$$

also ist unter Berücksichtigung des vorigen Paragraphen

$$F = \frac{b}{a}\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{b}{2a}\left\{x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\right\} + C.$$

Digitized by Google

Hieraus folgt, wenn der Inhalt der Ellipse mit E bezeichnet wird,

$$\frac{E}{4} = \frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{b}{2a}\left\{a\sqrt{a^2-a^2} + a^2 \arcsin\left(\frac{a}{a}\right)\right\} - 0$$

$$= \frac{b}{2a}\cdot\frac{a^2\pi}{2} = \frac{ab\pi}{4}.$$

Also ist

$$E = ab\pi.$$

§ 45.

Quadratur der Hyperbel.

Aus der Mittelpunktsgleichung $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ folgt

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2},$$

also ist

$$F = \frac{b}{a}\int \sqrt{x^2 - a^2}\,dx.$$

Durch partielle Integration erhalten wir

$$(1) \qquad F = \frac{b}{a}\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{b}{a}\left[x\sqrt{x^2-a^2} - \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}}\right].$$

Nun ist

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \int \frac{(x^2-a^2+a^2)\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \int \sqrt{x^2-a^2}\,dx + a^2\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}.$$

Dies in Gleichung (1) eingesetzt gibt

$$\frac{b}{a}\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{b}{a}\left[x\sqrt{x^2-a^2} - \int \sqrt{x^2-a^2}\,dx - a^2\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}\right],$$

oder

$$\frac{2b}{a}\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{b}{a}\left[x\sqrt{x^2-a^2} - a^2\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}\right].$$

Nun ist nach Grundformel (18)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = l\,(x + \sqrt{x^2-a^2}) + C.$$

Setzen wir dies ein, so erhalten wir nach Division durch 2

Digitized by Google

$$F = \frac{b}{a}\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx = \frac{b}{2a}\left[x\sqrt{x^2 - a^2} - a^2 l\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right)\right] + C,$$

oder

$$F = \frac{bx\sqrt{x^2 - a^2}}{2a} - \frac{ab}{2} l\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right) + C.$$

Da für $x = a$ die Fläche $F = 0$ sein muß, so erhalten wir zur Bestimmung der Konstanten C die Gleichung

$$-\frac{ab}{2} la + C = 0,$$

woraus folgt

$$C = \frac{ab}{2} la.$$

Also ist

$$F = \frac{bx\sqrt{x^2 - a^2}}{2a} - \frac{ab}{2} l\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right) + \frac{ab}{2} la,$$

oder

$$F = \frac{bx\sqrt{x^2 - a^2}}{2a} - \frac{ab}{2} l\left(\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}\right).$$

Aufgabe: Wie groß ist das Flächenstück F, welches von der Hyperbel und dem im Brennpunkt auf der x-Achse errichteten Lote begrenzt wird?

Lösung: $$F = \frac{2b}{a}\int_a^e \sqrt{x^2 - a^2}\, dx = \frac{b}{a}\left[be - a^2 l\left(\frac{b + e}{a}\right)\right],$$

worin e die lineare Exzentrizität bedeutet.

Für die gleichseitige Hyperbel wird demnach

$$F = a^2\left[\sqrt{2} - l\left(1 + \sqrt{2}\right)\right].$$

§ 46.

Quadratur der Cissoide des Diokles.

Aus der Gleichung der Cissoide $y^2 = \frac{x^3}{2r - x}$ folgt

$$y = \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{2r - x}},$$

also ist

$$F = \int \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{2r - x}}\, dx = \int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{2rx - x^2}} = \frac{1}{r}\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{1 - \frac{(r - x)^2}{r^2}}}.$$

Digitized by Google

Wir wenden die Substitutionsmethode an, indem wir setzen

(1) $\frac{r-x}{r} = z$, also $x^2 = r^2(1-z)^2$ und $dx = -r\,dz$.

Dann entsteht

$$F = \frac{1}{r}\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-\left(\frac{r-x}{r}\right)^2}} = -\frac{1}{r}\int \frac{r^2(1-z)^2 r\,dz}{\sqrt{1-z^2}} = -r^2\int \frac{(1-z)^2\,dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

$$= -r^2\int \frac{(1-2z+z^2)\,dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

$$= -r^2\cdot\left\{\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} - 2\int \frac{z\,dz}{\sqrt{1-z^2}} + \int \frac{z^2\,dz}{\sqrt{1-z^2}}\right\}.$$

Durch Benutzung der Grundformeln (12) und (19) entsteht hieraus

(2) $$F = -r^2\left\{-\arccos z - 2\cdot\frac{\sqrt{1-z^2}}{-1} + \int \frac{z^2\,dz}{\sqrt{1-z^2}}\right\}$$

$$= r^2\cdot\left\{\arccos z - 2\sqrt{1-z^2} + \int \frac{-z^2\,dz}{\sqrt{1-z^2}}\right\}.$$

Nun ist

$$\int \frac{-z^2\,dz}{\sqrt{1-z^2}} = \int \frac{(1-z^2-1)\,dz}{\sqrt{1-z^2}} = \int \sqrt{1-z^2}\,dz - \int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}},$$

also mit Hilfe von Grundformel (12)

(3) $$\int \frac{-z^2\,dz}{\sqrt{1-z^2}} = \int \sqrt{1-z^2}\,dz + \arccos z.$$

Ferner erhalten wir durch partielle Integration

(4) $$\int \sqrt{1-z^2}\,dz = z\sqrt{1-z^2} - \int \frac{-z^2\,dz}{\sqrt{1-z^2}}.$$

Substituieren wir den Wert von 4) in 3), so entsteht:

$$\int \frac{-z^2\,dz}{\sqrt{1-z^2}} = z\sqrt{1-z^2} - \int \frac{-z^2\,dz}{\sqrt{1-z^2}} + \arccos z,$$

oder

$$2\int \frac{-z^2\,dz}{\sqrt{1-z^2}} = z\sqrt{1-z^2} + \arccos z,$$

also

(5) $$\int \frac{-z^2\,dz}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{z\sqrt{1-z^2}}{2} + \tfrac{1}{2}\arccos z.$$

Digitized by Google

Mit Hilfe von Gleichung (5) wird nun aus unserer Gleichung (2)

$$F = r^2 \cdot \left\{\arccos z - 2\sqrt{1-z^2} + \tfrac{1}{2} z\sqrt{1-z^2} + \tfrac{1}{2}\arccos z\right\} + C,$$

oder

$$F = r^2 \left\{\tfrac{3}{2}\arccos z - \sqrt{1-z^2}\left(2 - \frac{z}{2}\right)\right\} + C.$$

Gehen wir von z auf x zurück mit Hilfe von Gleichung 1), so erhalten wir

$$F = r^2 \cdot \left\{\tfrac{3}{2}\arccos\left(\frac{r-x}{r}\right) - \sqrt{1-\left(\frac{r-x}{r}\right)^2}\cdot\left(2 - \frac{r-x}{2r}\right)\right\} + C,$$

oder

$$F = r^2\left[\tfrac{3}{2}\arccos\left(\frac{r-x}{r}\right) - \frac{3r+x}{2r^2}\cdot\sqrt{2rx - x^2}\right] + C.$$

Für $x = 0$ muß $F = 0$ sein, also muß auch $C = 0$ sein, so daß wir schließlich finden

$$(6) \qquad F = \tfrac{3}{2} r^2 \arccos\left(\frac{r-x}{r}\right) - \tfrac{1}{2}(3r + x)\sqrt{2rx - x^2}.$$

Aufgabe: Wie groß ist die ganze von der Cissoide und ihrer Asymptote begrenzte Fläche F?

Lösung:

$$F = 2\int_0^{2r}\sqrt{\frac{x^3}{2r-x}}\,dx = 2\cdot\tfrac{3}{2} r^2 \arccos\frac{r-2r}{r} = 3r^2\arccos(-1)$$
$$= 3r^2\pi.$$

Also ist F gleich dem dreifachen Inhalt des Erzeugungskreises der Cissoide.

§ 47.

Quadratur der gemeinen Cykloide.

Die Cykloide wird bekanntlich dargestellt durch die Gleichungen

$$x = r(\varphi - \sin\varphi),$$
$$y = r(1 - \cos\varphi),$$

worin r den Radius des rollenden Kreises und φ den Wälzungswinkel bedeutet. Hieraus folgt

$$dx = r(1 - \cos\varphi)\,d\varphi,$$

also ist

Digitized by Google

$$F = \int y\,dx = r^2 \int (1 - \cos\varphi)^2\,d\varphi = r^2 \int [1 - 2\cos\varphi + \cos^2\varphi]\,d\varphi$$
$$= r^2 \Big[\int d\varphi - 2\int \cos\varphi\,d\varphi + \int \cos^2\varphi\,d\varphi \Big].$$

Also ist mit Hilfe von Grundformel (23a)

$$F = r^2 \Big[\varphi - 2\sin\varphi + \int \cos^2\varphi\,d\varphi \Big]. \tag{1}$$

Auf das letzte Integral wenden wir die Methode der partiellen Integration an

$$\int \cos^2\varphi\,d\varphi = \int \cos\varphi\,d\sin\varphi = \cos\varphi \cdot \sin\varphi - \int \sin\varphi\,d\cos\varphi$$
$$= \cos\varphi \cdot \sin\varphi + \int \sin^2\varphi\,d\varphi.$$

Hieraus aber folgt

$$\int \cos^2\varphi\,d\varphi - \int \sin^2\varphi\,d\varphi = \sin\varphi\cos\varphi,$$

oder

$$\int [\cos^2\varphi - \sin^2\varphi]\,d\varphi = \int (2\cos^2\varphi - 1)\,d\varphi = 2\int \cos^2\varphi\,d\varphi - \int d\varphi$$
$$= 2\int \cos^2\varphi\,d\varphi - \varphi = \sin\varphi \cdot \cos\varphi.$$

Also ist

$$\int \cos^2\varphi\,d\varphi = \tfrac{1}{2}\sin\varphi\cos\varphi + \frac{\varphi}{2}.$$

Diesen Wert substituieren wir in Gleichung (1) und erhalten

$$F = r^2 \Big[\varphi - 2\sin\varphi + \tfrac{1}{2}\sin\varphi\cos\varphi + \frac{\varphi}{2} \Big] + C$$
$$= \frac{r^2}{2}[3\varphi - 4\sin\varphi + \sin\varphi\cos\varphi] + C.$$

Für $\varphi = 0$ muß $F = 0$, also auch $C = 0$ sein; mithin folgt schließlich

$$F = \frac{r^2}{2}[3\varphi - 4\sin\varphi + \sin\varphi\cos\varphi]. \tag{2}$$

Aufgabe: Wie groß ist der Inhalt der von einem vollständigen Cykloidenzug und der x-Achse eingeschlossenen Fläche F?

Digitized by Google

Lösung: $F = r^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos\varphi)^2 \, d\varphi = \frac{r^2}{2} \cdot 6\pi = 3r^2\pi.$

Also ist F gleich dem dreifachen Inhalt des rollenden Kreises.

§ 48.

Quadratur der Kardioide.

In Polarkoordinaten lautet die Gleichung der Kardioide

$$r = 2a(1 + \sin\varphi),$$

worin a den Radius des Erzeugungskreises bedeutet. Hieraus folgt

$$r^2 = 4a^2(1 + \sin\varphi)^2,$$

also

$$(1) \quad S = \tfrac{1}{2}\int 4a^2(1 + \sin\varphi)^2 d\varphi = 2a^2 \int (1 + 2\sin\varphi + \sin^2\varphi) d\varphi$$
$$= 2a^2\Big[\varphi - 2\cos\varphi + \int \sin^2\varphi \, d\varphi\Big].$$

Nun ist

$$\int \sin^2\varphi \, d\varphi = -\int \sin\varphi \, d\cos\varphi = -\Big[\sin\varphi\cos\varphi - \int \cos\varphi \, d\sin\varphi\Big]$$
$$= -\sin\varphi\cos\varphi + \int \cos^2\varphi \, d\varphi;$$

also

$$\int \sin^2\varphi \, d\varphi - \int \cos^2\varphi \, d\varphi = -\sin\varphi \cdot \cos\varphi,$$

oder

$$\int (\sin^2\varphi - \cos^2\varphi) d\varphi = \int (2\sin^2\varphi - 1) d\varphi = 2\int \sin^2\varphi \, d\varphi - \varphi$$
$$= -\sin\varphi\cos\varphi.$$

Also ist

$$\int \sin^2\varphi \, d\varphi = \frac{\varphi}{2} - \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{2}.$$

Setzen wir diesen Wert in Gleichung (1) ein, so erhalten wir

$$S = 2a^2\Big[\varphi - 2\cos\varphi + \frac{\varphi}{2} - \frac{\sin\varphi \cdot \cos\varphi}{2}\Big] + C$$
$$= a^2[3\varphi - 4\cos\varphi - \sin\varphi\cos\varphi] + C.$$

Digitized by Google

Für $\varphi = 0$ muß $S = 0$ sein; also muß

$$-4a^2 + C = 0$$

sein, also ist

$$C = 4a^2,$$

und wir haben

$$S = a^2[3\varphi - 4\cos\varphi - \sin\varphi \cdot \cos\varphi] + 4a^2,$$

oder endlich

$$S = a^2[4 + 3\varphi - 4\cos\varphi - \sin\varphi\cos\varphi]. \tag{2}$$

Aufgabe: Wie groß ist der Flächeninhalt F der Kardioide?

Lösung: $F = 2a^2\int_0^{2\pi}(1+\sin\varphi)^2 d\varphi = a^2[4 + 6\pi - 4] = 6a^2\pi.$

Also ist F gleich dem sechsfachen Inhalt des Erzeugungskreises der Kardioide.

§ 49.

Quadratur der Lemniskate.

In rechtwinkligen Koordinaten lautet die Gleichung der Lemniskate

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2),$$

also in Polarkoordinaten:

$$r^2 = a^2\cos 2\varphi,$$

also ist

$$S = \frac{a^2}{2}\int\cos 2\varphi\, d\varphi. \tag{1}$$

Wir wenden die Grundformel 23b an und finden

$$S = \frac{a^2}{4}\sin 2\varphi + C.$$

Für $\varphi = 0$ muß auch $S = 0$, also auch $C = 0$ sein, also ist

$$S = \frac{a^2}{4}\sin 2\varphi. \tag{2}$$

Aufgabe: Wie groß ist der Flächeninhalt F der Lemniskate?

Digitized by Google

Lösung: Wir finden zunächst für den vierten Teil der Lemniskate

$$\frac{F}{4} = \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\varphi\, d\varphi = \frac{a^2}{4}.$$

Also ist F gleich dem Quadrat über der halben Achse a.

Siebentes Kapitel.

Anwendung der Integralrechnung zur Rektifikation ebener Kurven.

§ 50.

Rektifikation in rechtwinkligen Koordinaten.

Der Bogen BP einer durch die Gleichung $y = f(x)$ in Fig. 18 dargestellten Kurve soll mit s bezeichnet werden. Wächst die Abszisse $x = OA$ um das Stück $AA_1 = \Delta x$, so wächst die Ordinate AP um das Stück $CP_1 = \Delta y$ und der Bogen BP um das Stück $PP_1 = \Delta s$. Je kleiner der Abszissenzuwachs Δx ist, desto kleiner wird der Fehler sein, den man macht, wenn man den Bogenzuwachs PP_1 als geradlinig betrachtet und die Gleichung ansetzt:

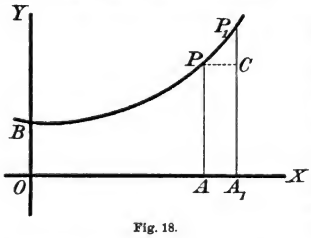


Fig. 18.

$$(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 = (\Delta s)^2, \tag{1}$$

oder

$$\frac{\Delta s}{\Delta x} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}.$$

Digitized by Google

Beim Übergang zur Grenze wird also genau richtig sein:

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

also

$$(2a) \quad s = \int \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx + C = \int \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx + C.$$

Von der Gleichung (1) aus kann man auch folgendermaßen weiterschließen:

$$\frac{\Delta s}{\Delta y} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)^2},$$

also

$$\frac{ds}{dy} = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2},$$

also

$$(2b) \quad s = \int \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy + C.$$

Die Konstante C wird durch die Bedingungen der einzelnen Aufgaben bestimmt. In unserem Falle muß für $x = 0$ auch $s = 0$ sein. Wir werden daher das Integral

$$\int \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

ausrechnen, im Resultat $s = 0$ setzen, dem so gefundenen Wert das entgegengesetzte Vorzeichen geben, und ihn dann gleich C setzen.

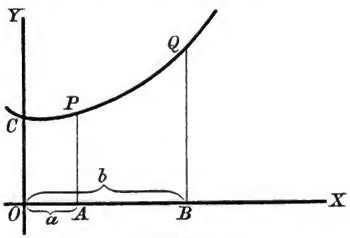


Fig. 19.

Soll der zwischen den Kurvenpunkten P und Q in Fig. 19, die zu den Abszissen $x = a$ und $x = b$ gehören, gelegene Bogen PQ berechnet werden, so werden wir ihn als Differenz der Bögen CQ und CP betrachten und also ansetzen:

$$(3) \quad \text{arc}\, PQ = \int_{(x=b)} \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx - \int_{(x=a)} \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

$$= \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

Digitized by Google

§ 51.

Rektifikation in Polarkoordinaten.

Ist die Gleichung der zu rektifizierenden Kurve in Polarkoordinaten gegeben, etwa $r = f(\varphi)$, so haben wir die Resultate des vorigen Paragraphen mittels der bekannten Gleichungen

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos\varphi \\ y = r \cdot \sin\varphi \end{cases} \tag{1}$$

zu transformieren. Da bei einer Änderung von φ auch r seinen Wert ändert, so folgen aus (1) die Gleichungen

$$\frac{dx}{d\varphi} = -r\sin\varphi + \frac{dr}{d\varphi}\cos\varphi,$$

$$\frac{dy}{d\varphi} = r\cos\varphi + \frac{dr}{d\varphi}\sin\varphi,$$

also

$$\begin{cases} \left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 = r^2\sin^2\varphi - 2r\sin\varphi\cos\varphi\frac{dr}{d\varphi} + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2\cos^2\varphi \\ \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2 = r^2\cos^2\varphi + 2r\sin\varphi\cos\varphi\frac{dr}{d\varphi} + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2\sin^2\varphi. \end{cases} \tag{2}$$

Aus Gleichung (1) des vorigen Paragraphen folgt:

$$\left(\frac{\Delta x}{\Delta\varphi}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta\varphi}\right)^2 + \left(\frac{\Delta s}{\Delta\varphi}\right)^2,$$

also beim Übergang zur Grenze:

$$\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2 = \left(\frac{ds}{d\varphi}\right)^2.$$

Substituieren wir hierin die Werte aus der Gleichung (2), so entsteht

$$\frac{ds}{d\varphi} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2},$$

also nach der Integration:

$$s = \int\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}\,d\varphi + C, \tag{3a}$$

oder auch

$$s = \int\sqrt{1 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2}\,dr + C. \tag{3}$$

Die Konstantenbestimmung geschieht wie früher nach den Bedingungen der speziellen Aufgabe.

Digitized by Google

Soll der Bogen s berechnet werden, der zwischen denjenigen Kurvenpunkten liegt, die zu den Anomalien φ_1 und φ_2 gehören, so ist wieder

$$s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}\, d\varphi. \tag{3a}$$

Liegt der zu berechnende Bogen s zwischen denjenigen Kurvenpunkten, die zu den Vektoren r_1 und r_2 gehören, so ist:

$$s = \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{1 + \left(\frac{r\,d\varphi}{dr}\right)^2}\, dr. \tag{3b}$$

§ 52.

Rektifikation der gemeinen Parabel.

Aus der Scheitelgleichung der Parabel $y^2 = 2px$ folgt durch Differentiation: $2y\,dy = 2p\,dx$, also ist $\frac{dx}{dy} = \frac{y}{p}$ und

$$s = \int \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy = \int \sqrt{1 + \frac{y^2}{p^2}}\, dy = \frac{1}{p} \int \sqrt{p^2 + y^2}\, dy.$$

Wir integrieren partiell und finden:

$$(1) \qquad s = \frac{1}{p} \int \sqrt{p^2 + y^2}\, dy = \frac{1}{p} \left[y \sqrt{p^2 + y^2} - \int \frac{y^2\, dy}{\sqrt{p^2 + y^2}} \right].$$

Nun ist:

$$\int \frac{y^2\, dy}{\sqrt{p^2 + y^2}} = \int \frac{(y^2 + p^2 - p^2)\, dy}{\sqrt{p^2 + y^2}} = \int \sqrt{p^2 + y^2}\, dy - p^2 \int \frac{dy}{\sqrt{p^2 + y^2}},$$

oder nach Grundformel (18):

$$\int \frac{y^2\, dy}{\sqrt{p^2 + y^2}} = \int \sqrt{p^2 + y^2}\, dy - p^2 \cdot l\left(y + \sqrt{p^2 + y^2}\right).$$

Setzen wir diesen Wert in Gleichung (1) ein, so erhalten wir:

$$\frac{1}{p} \int \sqrt{p^2 + y^2}\, dy = \frac{1}{p} \left[y \sqrt{p^2 + y^2} - \int \sqrt{p^2 + y^2}\, dy + p^2 \cdot l\left(y + \sqrt{p^2 + y^2}\right) \right],$$

also:

Digitized by Google

$$\frac{2}{p}\int\sqrt{p^2+y^2}\,dy=\frac{1}{p}\Big[y\sqrt{p^2+y^2}+p^2 l\,(y+\sqrt{p^2+y^2})\Big],$$

also endlich:

$$s=\frac{y\sqrt{p^2+y^2}}{2p}+\frac{p\cdot l\,(y+\sqrt{p^2+y^2})}{2}+C.$$

Für $y=0$ muß $s=0$ sein, also:

$$\frac{p}{2}l\,p+C=0,$$

also:

$$C=-\frac{p}{2}l\,p.$$

Hierdurch entsteht:

$$s=\frac{y\sqrt{p^2+y^2}}{2p}+\frac{p\cdot l\,(y+\sqrt{p^2+y^2})}{2}-\frac{p\,l\,p}{2},$$

oder:

$$(2)\qquad s=\frac{y\sqrt{p^2+y^2}}{2p}+\frac{p}{2}l\Big(\frac{y+\sqrt{p^2+y^2}}{p}\Big).$$

Aufgabe: Wie lang ist der durch den Parameter von der Parabel abgeschnittene Bogen s?

Lösung: $s=p\Big[\sqrt{2}+l\,(1+\sqrt{2})\Big]$.

§ 53.

Rektifikation der Cissoide des Diokles.

Aus der Kurvengleichung $y^2=\frac{x^3}{2r-x}$ folgt:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(3r-x)\sqrt{x}}{\sqrt{(2r-x)^3}},$$

also ist:

$$(1)\qquad s=\int\sqrt{1+\frac{(3r-x)^2x}{(2r-x)^3}}\,dx=\int\sqrt{\frac{8r^3-3r^2x}{2r-x}}\cdot\frac{dx}{2r-x}$$

$$=r\cdot\int\sqrt{\frac{8r-3x}{2r-x}}\cdot\frac{dx}{2r-x}.$$

Wir setzen:

$$(2)\qquad \sqrt{\frac{8r-3x}{2r-x}}=z,$$

also:

$$dx=\frac{4rz\,dz}{(3-z^2)^2}\quad\text{und}\quad 2r-x=-\frac{2r}{3-z}.$$

Digitized by Google

Dann wird aus Gleichung (1):

$$s = -r\int \frac{z\cdot 4rz(3-z)^2\,dz}{(3-z^2)^2} = -2r\int \frac{z^2\,dz}{3-z^2} = 2r\int \frac{z^2\,dz}{z^2-3}$$

$$= 2r\int \frac{(z^2-3+3)\,dz}{z^2-3},$$

also:

$$s = 2r\Big[\int \frac{z^2-3}{z^2-3}\,dz + 3\int \frac{dz}{z^2-3}\Big] \tag{3}$$

$$= 2r\Big[z + 3\int \frac{dz}{(z+\sqrt{3})(z-\sqrt{3})}\Big].$$

Um das letzte Integral auszuwerten, setzen wir:

$$\frac{z+\sqrt{3}}{z-\sqrt{3}} = u, \tag{4}$$

also:

$$dz = -\frac{(z-\sqrt{3})^2\,du}{2\sqrt{3}} \quad \text{und} \quad (z+\sqrt{3})(z-\sqrt{3}) = u(z-\sqrt{3})^2.$$

Dann ist:

$$3\cdot\int \frac{dz}{(z+\sqrt{3})(z-\sqrt{3})} = -\frac{3}{2\sqrt{3}}\int \frac{(z-\sqrt{3})^2\,du}{u(z-\sqrt{3})^2}$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{du}{u} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\,l\,u = -\frac{\sqrt{3}}{2}\,l\Big(\frac{z+\sqrt{3}}{z-\sqrt{3}}\Big).$$

Durch Substitution dieses Wertes wird aus Gleichung (3):

$$s = 2r\Big[z - \frac{\sqrt{3}}{2}\,l\Big(\frac{z+\sqrt{3}}{z-\sqrt{3}}\Big)\Big] + C = 2r\Big[z - \frac{\sqrt{3}}{2}\,l\Big(\frac{(z+\sqrt{3})^2}{z^2-3}\Big)\Big] + C$$

$$= 2r\Big[z - \sqrt{3}\cdot l\Big(\frac{z+\sqrt{3}}{\sqrt{z^2-3}}\Big)\Big] + C.$$

Gehen wir nun von z auf x zurück mit Hilfe von Gleichung (2), so erhalten wir:

$$s = 2r\left[\sqrt{\frac{8r-3x}{2r-x}} - \sqrt{3}\cdot l\left(\frac{\sqrt{\frac{8r-3x}{2r-x}}+\sqrt{3}}{\sqrt{\frac{8r-3x}{2r-x}}-3}\right)\right] + C$$

$$= 2r\Big[\sqrt{\frac{8r-3x}{2r-x}} - \sqrt{3}\cdot l\Big(\frac{\sqrt{8r-3x}+\sqrt{3(2r-x)}}{\sqrt{2r}}\Big)\Big] + C.$$

Digitized by Google

Für $x = 0$ muß $s = 0$ sein, also ist:

$$2r\left[2 - \sqrt{3} \cdot l\left(\frac{\sqrt{8r} + \sqrt{6r}}{\sqrt{2r}}\right)\right] + C = 0,$$

also ist:

$$C = 2r\left[\sqrt{3} \cdot l\,(2 + \sqrt{3}) - 2\right]$$

und:

$$(5)\quad s = 2r\left[\sqrt{\frac{8r - 3x}{2r - x}} - 2 - \sqrt{3} \cdot l\left(\frac{\sqrt{8r - 3x} + \sqrt{3\,(2r - x)}}{(2 + \sqrt{3})\sqrt{2r}}\right)\right].$$

Aufgabe: Wie lang ist der im Erzeugungskreise liegende Cissoidenbogen?

Lösung: $s = 4r\left[\sqrt{5} - 2 - \sqrt{3}\, l\, \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{(2 + \sqrt{3})\sqrt{2}}\right]$.

§ 54.

Rektifikation der gemeinen Cykloide.

1. Methode.

Ist r der Radius des rollenden Kreises, so folgt aus der Cykloidengleichung:

$$x = r \cdot \arccos\frac{r - y}{r} \mp \sqrt{2ry - y^2},$$

durch Differentiation:

$$\frac{dx}{dy} = \sqrt{\frac{y}{2r - y}},$$

also ist:

$$s = \int\sqrt{1 + \frac{y}{2r - y}}\, dy = \int\sqrt{\frac{2r}{2r - y}}\, dy = \sqrt{2r} \cdot \int\frac{dy}{\sqrt{2r - y}}.$$

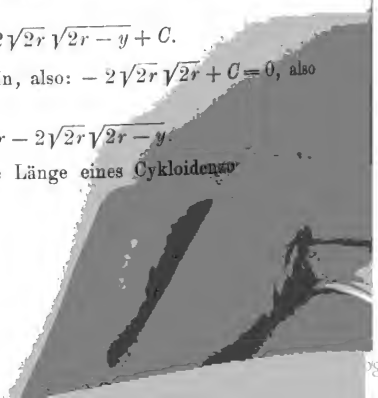
Mit Benutzung unserer Grundformel (2) für $m = -\frac{1}{2}$ erhalten wir sogleich:

$$s = -2\sqrt{2r}\,\sqrt{2r - y} + C.$$

Für $y = 0$ muß $s = 0$ sein, also: $-2\sqrt{2r}\,\sqrt{2r} + C = 0$, also $C = 4r$. Mithin ist:

$$(1)\qquad s = 4r - 2\sqrt{2r}\,\sqrt{2r - y}.$$

Aufgabe: Die ganze Länge eines Cykloidenbogens zu berechnen.



Lösung: Für den höchsten Punkt der Cykloide, d. h. für die halbe Länge des Cykloidenzuges, ist $y = 2r$, also ist der halbe Cykloidenzug $= 4r$, der ganze $= 8r$.

2. Methode.

Ist r der Radius des rollenden Kreises und φ der Wälzungswinkel, so wird die Cykloide auch durch die Gleichungen $x = r(\varphi - \sin\varphi)$ und $y = r(1 - \cos\varphi)$ dargestellt. Hieraus folgt $dx = r(1 - \cos\varphi)\,d\varphi$, $dy = r\sin\varphi\,d\varphi$, also

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin\varphi}{1-\cos\varphi}.$$

Also ist

$$\begin{aligned} s &= \int \sqrt{1 + \tfrac{\sin^2\varphi}{(1-\cos\varphi)^2}}\, r(1-\cos\varphi)\,d\varphi \\ &= r\int \sqrt{(1-\cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi}\,d\varphi = r\sqrt{2}\int \sqrt{1-\cos\varphi}\,d\varphi \\ &= r\sqrt{2}\int \sqrt{2\sin^2\tfrac{\varphi}{2}}\,d\varphi = 2r\int \sin\tfrac{\varphi}{2}\,d\varphi = 4r\int \sin\tfrac{\varphi}{2}\,d\left(\tfrac{\varphi}{2}\right) \\ &= -4r\cos\tfrac{\varphi}{2} + C. \end{aligned}$$

Nun muß für $\varphi = 0$ auch $s = 0$, also $C = 4r$ sein, und wir erhalten

$$s = 4r\left(1 - \cos\tfrac{\varphi}{2}\right). \tag{2}$$

Setzen wir $\varphi = 2\pi$, so ergibt sich als Länge eines ganzen Cykloidenzuges wie oben $s = 8r$.

§ 55.

Rektifikation der Kardioide.

1. Methode.

Während wir in den §§ 32 und 48 als Gleichung der Kardioide in Polarkoordinaten $r = 2a(1 + \sin\varphi)$ angenommen haben, wollen wir jetzt die Kurve um den Koordinatenanfang in ihrer Ebene nach links drehen, und zwar um einen Winkel von 90°. Die Gleichung der Kurve wird dann

Digitized by Google

$$r = 2a(1-\cos\varphi),$$

also

$$\frac{dr}{d\varphi} = 2a\sin\varphi,$$

also

$$s = \int\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}\,d\varphi = \int\sqrt{4a^2(1-\cos\varphi)^2+4a^2\sin^2\varphi}\,d\varphi$$

$$= 2a\sqrt{2}\int\sqrt{1-\cos\varphi}\,d\varphi = 2a\sqrt{2}\int\sqrt{2\sin^2\frac{\varphi}{2}}\,d\varphi$$

$$= 4a\int\sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi = 8a\int\sin\frac{\varphi}{2}\,d\left(\frac{\varphi}{2}\right) = -8a\cos\frac{\varphi}{2}+C.$$

Für $\varphi = 0$ muß $s = 0$, also $C = 8a$ sein, und wir erhalten

$$(1)\qquad s = 8a\left(1-\cos\frac{\varphi}{2}\right).$$

Aufgabe: Den Umfang u der Kardioide zu berechnen.
Lösung: Wir setzen $\varphi = 2\pi$ und finden $u = 16a$.

2. Methode.

Wir haben bisher stets die Rektifikationsformel § 51, (3a) benutzt; zur Übung wollen wir auf die Kardioide jetzt auch die Formel § 51, (3b) anwenden. Aus $r = 2a(1-\cos\varphi)$ folgt

$$\cos\varphi = \frac{2a-r}{2a},$$

also

$$\varphi = \arccos\left(\frac{2a-r}{2a}\right),$$

also

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{1}{\sqrt{4ar-r^2}}.$$

Demnach ist

$$s = \int\sqrt{1+\left(r\frac{d\varphi}{dr}\right)^2}\,dr = \int\sqrt{1+\frac{r^2}{4ar-r^2}}\,dr = \int\sqrt{\frac{4ar}{4ar-r^2}}\,dr$$

$$= 2\sqrt{a}\int\frac{dr}{\sqrt{4a-r}} = -4\sqrt{a}\sqrt{4a-r}+C.$$

Für $r = 0$ muß $s = 0$, also $C = 8a$ sein, und wir erhalten

$$(2)\qquad s = 8a - 4\sqrt{4a^2-ar}.$$

Um den halben Umfang der Kardioide zu finden, setzen wir $r = 4a$; es wird dann $s = 8a$, also ist der ganze Umfang wie oben gleich $16a$.

Digitized by Google

Achtes Kapitel.

Anwendung der höheren Analysis auf die Mechanik.

§ 56.

Erklärungen.

a) Den Weg (spatium), den ein sich bewegender materieller Punkt zurücklegt, bezeichnen wir mit s, die Zeit (tempus), die er dazu gebraucht, mit t.

b) Ist die Bahn des Punktes eine krumme Linie, die wir immer als stetig voraussetzen, so projizieren wir sie auf die drei Achsen eines rechtwinkligen Koordinatensystems. Statt der wirklichen Bewegung des Punktes können wir dann die Bewegung der Projektionslote auf den Achsen betrachten. Sind nämlich diese drei geradlinigen Bewegungen bekannt, so kann aus ihnen nach dem Satze vom Parallelogramm der Bewegungen in jedem Augenblick die wirkliche Bewegung als Resultierende ermittelt werden. Es genügt also, wenn wir geradlinige Bewegungen untersuchen.

c) Wenn der materielle Punkt stets und überall in gleichen Zeiten gleiche Wege zurücklegt, so heißt seine Bewegung gleichförmig; wenn er nicht immer in gleichen Zeiten gleiche Wege durchmißt, so heißt seine Bewegung ungleichförmig.

§ 57.

Geschwindigkeit.

a) Bei der gleichförmigen Bewegung verstehen wir unter der Geschwindigkeit (velocitas) v des bewegten Punktes

Digitized by Google

den Weg, welchen er in der Zeiteinheit zurücklegt. Wir haben dann die Gleichung

$$(I) \qquad v = \frac{s}{t},$$

worin v eine Konstante ist. Schreiben wir hierfür $s = v \cdot t$, so können wir auch sagen: Bei der gleichförmigen Bewegung ist die zurückgelegte Strecke stets der Zeit proportional.

b) Bei der ungleichförmigen Bewegung ist v nicht mehr eine Konstante, sondern eine Funktion der Zeit t. Wir können hier nicht mehr von der Geschwindigkeit des Punktes schlechtweg sprechen, sondern nur von derjenigen Geschwindigkeit, welche der Punkt zu einer bestimmten Zeit oder an einer bestimmten Stelle seiner Bahn besitzt. Diese läßt sich nun folgendermaßen bestimmen. Wir nehmen an, der Punkt habe nach t Sekunden den Weg s durchmessen und befinde sich nun im Punkte P. Er wird dann im nächsten Zeitteilchen Δt den Weg Δs zurücklegen und nach dem Punkte P_1 gelangen. Der Quotient $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ stellt dann nach Gleichung (I) die mittlere oder Durchschnittsgeschwindigkeit des bewegten Punktes zwischen P und P_1 dar. Dieser Quotient ist nicht mehr konstant, sondern davon abhängig, wie groß wir Δt wählen oder, anders ausgedrückt, wie weit P_1 von P entfernt ist. Lassen wir Δt und damit auch Δs gegen Null konvergieren, so wird der Quotient $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ sich einem bestimmten Grenzwert nähern. Diesen Grenzwert nennen wir die Geschwindigkeit des materiellen Punktes an der Stelle P, und haben demnach die Gleichung $v = \lim \frac{\Delta s}{\Delta t}$ oder

$$(II) \qquad v = \frac{ds}{dt},$$

also den Satz: Die Geschwindigkeit ist der erste Differentialquotient des Weges, genommen nach der Zeit.

Digitized by Google

§ 58.

Beschleunigung.

a) Die gleichmäßig beschleunigte Bewegung. — Wenn bei einer ungleichförmigen Bewegung die Geschwindigkeit stets und überall in gleichen Zeitabschnitten um den gleichen Betrag zu- oder abnimmt, so nennen wir die Bewegung eine gleichmäßig beschleunigte (oder gleichmäßig verzögerte) und verstehen unter der Beschleunigung (acceleratio) c die konstante Zunahme (oder Abnahme) der Geschwindigkeit in der Zeiteinheit. Hat der materielle Punkt keine Anfangsgeschwindigkeit, so können wir statt dessen auch sagen: Beschleunigung ist die in einer beliebigen Zeit erlangte Geschwindigkeit, dividiert durch diese Zeit. Also ist

$$(I) \qquad c = \frac{v}{t}.$$

Schreiben wir hierfür $v = c \cdot t$, so erkennen wir, daß bei der gleichmäßig beschleunigten Bewegung die Geschwindigkeit stets der Zeit proportional ist.

b) Die ungleichmäßig beschleunigte Bewegung. — Besteht diese Proportionalität nicht, ist vielmehr v irgendeine andere Funktion von t, so wird auch die Geschwindigkeit in gleichen Zeiten nicht um den gleichen Betrag wachsen; die Bewegung heißt dann ungleichmäßig beschleunigt. In diesem Falle kann die Beschleunigung ganz entsprechend definiert werden, wie es in § 57 für die Geschwindigkeit geschehen ist. Hat nämlich der bewegte Punkt nach t Sekunden die Geschwindigkeit v in dem Punkte P erlangt, so wird er in dem folgenden Zeitteilchen Δt einen Geschwindigkeitszuwachs erhalten, den wir mit Δv bezeichnen. Der Quotient $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ stellt dann nach Gleichung (I) die mittlere oder Durchschnittsbeschleunigung während des Zeitteilchens Δt dar. Diese Größe ist aber keine Konstante, sondern erstens von der Lage des Punktes P, zweitens von der Größe des Zeitteilchens Δt abhängig. Lassen wir Δt und damit auch Δv gegen Null kon-

Digitized by Google

vergieren, so wird sich der Quotient $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ einem bestimmten Grenzwerte nähern, der nur noch von der Lage des Punktes P abhängt. Diesen Grenzwert nennen wir die Beschleunigung im Punkte P, und haben demnach die Gleichung $c = \lim \frac{\Delta v}{\Delta t}$, oder

$$c = \frac{dv}{dt}, \tag{II}$$

also den Satz: Die Beschleunigung ist gleich dem ersten Differentialquotienten der Geschwindigkeit, genommen nach der Zeit.

Setzen wir in diese Gleichung den Wert von v aus § 57, Gleichung (II) ein, so folgt $c = \frac{d\left(\frac{ds}{dt}\right)}{dt}$, oder

$$c = \frac{d^2s}{dt^2}, \tag{III}$$

also haben wir den Satz: Die Beschleunigung ist gleich dem zweiten Differentialquotienten des Weges, genommen nach der Zeit.

Multiplizieren wir die Gleichungen § 57 (II) und § 58 (II) miteinander, so erhalten wir noch die Beziehung:

$$v\,dv = c\,ds, \tag{IV}$$

oder, da $v\,dv = \frac{1}{2}\,d(v^2)$ ist:

$$d(v^2) = 2\,c\,ds. \tag{V}$$

§ 59.

Übungen.

1. Ein materieller Punkt befinde sich zur Zeit $t=0$ im Koordinatenanfangspunkt. Ihm werde eine beliebige Anfangsgeschwindigkeit v_0 erteilt, deren Komponenten nach den Achsen a und b seien. Wie

Digitized by Google

bewegt sich der Punkt unter dem Einfluß der Schwerkraft?

Lösung: Die Schwerkraft beschleunigt den Punkt nur in der Richtung der Y-Achse. Diese Beschleunigung ist konstant und werde mit $-g$ bezeichnet. Die Beschleunigung in der Richtung der X-Achse ist $= 0$.

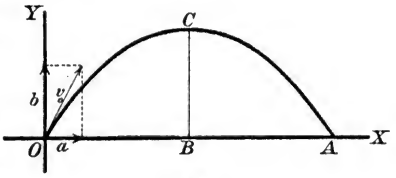


Fig. 20.

Wir erhalten daher nach § 58 (III) als Differentialgleichungen der Bewegung:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -g.$$

Die Integration dieser Gleichungen gibt:

$$\frac{dx}{dt} = a \quad \text{und} \quad \frac{dy}{dt} = -gt + b.$$

Integrieren wir diese Gleichungen abermals, so erhalten wir:

$$x = at + a' \quad \text{und} \quad y = -\frac{g}{2}t^2 + bt + b'.$$

Da zur Zeit $t = 0$ nach der Aufgabe auch $x = 0$ und $y = 0$ sind, so müssen auch die beiden Integrationskonstanten a' und b' gleich Null sein. Die Gleichungen lauten also:

(1) $$x = at$$

(2) $$y = bt - \frac{g}{2}t^2.$$

Eliminieren wir aus diesen Gleichungen die Größe t, so erhalten wir als Gleichung der von dem Punkte durchmessenen Bahn:

(3) $$y = \frac{b}{a}x - \frac{g}{2a^2}x^2.$$

Die Bahn ist also eine Parabel.

Digitized by Google

Setzen wir in Gleichung (2) $y = 0$, so ergibt sich als ganze Dauer des Wurfes:

$$t = \frac{2b}{g}. \tag{4}$$

Setzen wir diesen Wert von t in Gleichung (1) ein, so ergibt sich als Wurfweite:

$$OA = \frac{2ab}{g}. \tag{5}$$

Aus Gleichung (2) folgt: $\frac{dy}{dt} = b - gt$. Setzen wir $\frac{dy}{dt} = 0$, so ergibt sich, daß y seinen größten Wert zur Zeit $t = \frac{b}{g}$ erhält, und zwar ist diese Wurfhöhe:

$$BC = \frac{b^2}{2g}. \tag{6}$$

Als spezielle Fälle erhalten wir aus diesen Formeln die Gesetze für den freien Fall und für den vertikal aufwärts oder abwärts gerichteten Wurf.

2. Ein materieller Punkt bewege sich mit konstanter Geschwindigkeit auf einem Kreise mit dem Radius r. Wie groß ist die Zentripetalbeschleunigung?

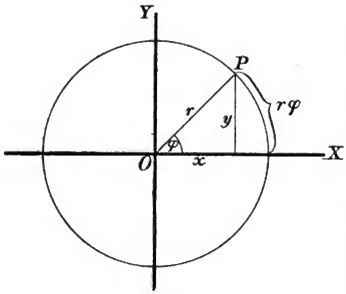


Fig. 21.

Lösung: Die Zeit, in welcher der Punkt die ganze Peripherie durchläuft, sei T. Dann ist nach § 57 (I) die Geschwindigkeit:

$$v = \frac{s}{t} = \frac{2r\pi}{T}.$$

Hat nun der Punkt in der Zeit t den zum Zentriwinkel φ gehörigen Bogen $r\varphi$ durchlaufen, so muß die Proportion stattfinden:

$$r\varphi : t = 2r\pi : T,$$

woraus folgt:

$$\varphi = \frac{2\pi}{T} \cdot t.$$

Digitized by Google

Führen wir nun rechtwinklige Koordinaten ein, so ist:

$$x = r\cos\varphi = r\cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)$$

und

$$y = r\sin\varphi = r\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right).$$

Durch Differentiation nach t erhalten wir hieraus zunächst:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{2\pi r}{T}\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

und

$$\frac{dy}{dt} = \frac{2\pi r}{T}\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

und durch abermalige Differentiation nach t:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{4\pi^2 r}{T^2}\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

und

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{4\pi^2 r}{T^2}\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right).$$

Nun ist nach § 58 (III) $\frac{d^2x}{dt^2}$ die Beschleunigung in der Richtung der X-Achse, $\frac{d^2y}{dt^2}$ diejenige in der Richtung der Y-Achse. Die gesuchte Zentripetalbeschleunigung, d. h. die Beschleunigung in der Richtung des Radius, ist die Resultante aus diesen Achsenbeschleunigungen, also ist die Zentripetalbeschleunigung

$$\sqrt{\left[\frac{d^2x}{dt^2}\right]^2 + \left[\frac{d^2y}{dt^2}\right]^2} = \sqrt{\frac{16\pi^4 r^2}{T^4}\cos^2\left(\frac{2\pi}{T}t\right) + \frac{16\pi^4 r^2}{T^4}\sin^2\left(\frac{2\pi}{T}t\right)}$$
$$= \frac{4\pi^2 r}{T^2}.$$

3. Auf der X-Achse befinde sich ein materieller Punkt zur Zeit t in P. Derselbe werde vom Koordinatenanfang O angezogen mit einer Kraft, die proportional seinem Abstande von O ist. Welche Bewegung führt der Punkt aus?

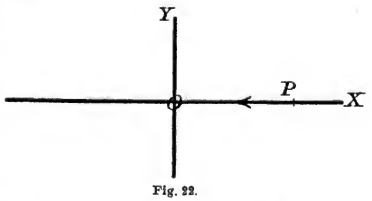


Fig. 22.

Digitized by Google

Lösung: Bedeutet k^2 den Proportionalitätsfaktor, so ist die in diesem Beispiel nicht konstante Beschleunigung:

$$c = -k^2 x, \tag{1}$$

wobei das negative Zeichen gewählt ist, weil die von O wirkende Kraft die Abszisse x zu verkleinern strebt. Wir benutzen die Gleichung § 58 (V):

$$d(v^2) = 2c\,ds.$$

Da die Bahn mit der X-Achse zusammenfällt, so ist das Bahnelement $ds = dx$, also mit Hilfe von (1):

$$d(v^2) = -2k^2 x\,dx.$$

Durch Integration ergibt sich:

$$v^2 = -k^2x^2 + c^2,$$

wobei die Konstante c^2 diejenige Geschwindigkeit ist, mit welcher der Punkt den Koordinatenanfang passiert. Also ist:

$$v = \sqrt{c^2 - k^2x^2},$$

also nach § 57 (II):

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{c^2 - k^2x^2},$$

also:

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{c^2 - k^2x^2}},$$

also:

$$t = \int \frac{dx}{\sqrt{c^2 - k^2x^2}},$$

oder mittels der Substitution $kx = u$:

$$t = \frac{1}{k}\int \frac{du}{\sqrt{c^2 - u^2}},$$

also nach § 34, 13:

$$t = \frac{1}{k}\arcsin\left(\frac{u}{c}\right) + C.$$

Wird die Zeit vom Durchgang des Punktes durch den Koordinatenanfang an gerechnet, so verschwindet die Integrationskonstante C und wir erhalten:

$$t = \frac{1}{k}\arcsin\left(\frac{kx}{c}\right),$$

also

Digitized by Google

$$\frac{kx}{c} = \sin(kt),$$

oder, wenn $\frac{c}{k} = A$ gesetzt wird:

(2) $$x = A \sin(kt).$$

Der Punkt führt also auf der X-Achse eine Sinusschwingung um den Punkt O aus. Ist $t = 0$, so ist auch $x = 0$; für $t = \frac{\pi}{2k}$ hat x den größten Wert, nämlich $x = A$; A heißt die Amplitude der Schwingung. Die Zeit, in welcher die halbe Schwingung ausgeführt wird, ist also $\frac{\pi}{2k}$, mithin ist die Dauer der ganzen Schwingung: $T = \frac{\pi}{k}$.

Anmerkung: Die Bewegungsgleichung für das Kreispendel lautet:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin\varphi.$$

Ist der Winkel so klein, daß annähernd φ statt $\sin\varphi$ gesetzt werden darf, so wird hieraus:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l}\varphi,$$

also dieselbe Gleichung wie oben, wenn $k = \sqrt{\frac{g}{l}}$ gesetzt wird. Mithin ist annähernd die Schwingungsdauer des Pendels bei kleinen Ausschlagswinkeln:

$$T = \frac{\pi}{k} = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

4. Das zweite Keplersche Gesetz.

Nach dem Newtonschen Gravitationsgesetze ziehen sich zwei Massenpunkte M und m in der Entfernung r mit einer Kraft an, die gleich $-f \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}$ ist, wobei f einen Proportionalitätsfaktor bedeutet. Befindet sich also in O die Sonne (Masse M) und in P ein Planet (Masse m), so ist die X-Komponente der Anziehung

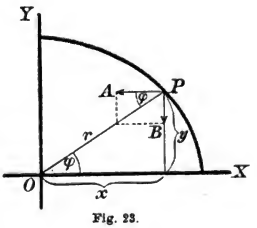


Fig. 23.

Digitized by Google

$$PA = -f\frac{Mm}{r^2}\cos\varphi$$

und die Y-Komponente der Anziehung

$$PB = -f\frac{Mm}{r^2}\sin\varphi.$$

Setzt man also $\cos\varphi = \frac{x}{r}$ und $\sin\varphi = \frac{y}{r}$, so erhält man als Differentialgleichungen der Bewegung:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -f\frac{Mm}{r^3}\cdot x, \tag{1}$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -f\frac{Mm}{r^3}\cdot y. \tag{2}$$

Multipliziert man (1) mit y, (2) mit x und subtrahiert dann (1) von (2), so ergibt sich:

$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

oder:

$$\frac{d}{dt}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = 0,$$

also durch Integration:

$$x\cdot\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = C. \tag{3}$$

Führt man nun mittels der Gleichungen $x = r\cos\varphi$ und $y = r\sin\varphi$ Polarkoordinaten ein, so wird aus (3):

$$r\cos\varphi\left(\frac{dr}{dt}\sin\varphi + r\cos\varphi\cdot\frac{d\varphi}{dt}\right)$$
$$-r\sin\varphi\left(\frac{dr}{dt}\cos\varphi - r\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt}\right) = C,$$

oder:

$$r^2\frac{d\varphi}{dt} = C. \tag{4}$$

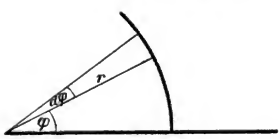


Fig. 24.

Wächst der Winkel φ in der Zeit dt um $d\varphi$, so ist $\frac{1}{2}r^2d\varphi$ der vom Radius r in der Zeit dt überstrichene Sektor, also ist $\frac{1}{2}r^2\cdot\frac{d\varphi}{dt}$ die in der Zeiteinheit vom Radius beschriebene Fläche. Die Gleichung (4) besagt also, daß die in der Zeiteinheit vom Radiusvektor über-

Digitized by Google

strichene Fläche konstant ist, oder daß die Radiivektores in gleichen Zeiten gleiche Flächenräume bei der Bewegung der Planeten um die Sonne beschreiben.

5. Auf einer starren ebenen Kurve, deren Gleichung $y = f(x)$ ist, rollt ein materieller Punkt von A aus ohne Anfangsgeschwindigkeit unter der alleinigen Wirkung der Schwere hinab. Welche Geschwindigkeit hat er erlangt, wenn er in B angekommen ist?

Lösung: Um die Beschleunigung c zu finden, die der Punkt erfährt, zerlegen wir die durch die Strecke BE dargestellte Schwerkraft g in eine tangentiale Komponente BC und in eine normale Komponente BD. Da die letztere durch die Festigkeit der starren Kurve aufgehoben wird, so wirkt beschleunigend nur die Tangentialkomponente BC. Weil sie die Ordinate y zu verkleinern strebt, nehmen wir sie negativ. Also ist $c = -BC = -g \sin \alpha$. Nun ist

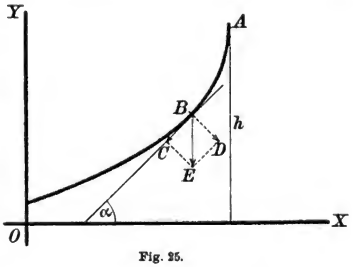


Fig. 25.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx}, \quad \text{also} \quad \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} = \frac{dy}{dx},$$

also

$$\sin^2 \alpha = \frac{(dy)^2}{(dx)^2 + (dy)^2} = \left(\frac{dy}{ds}\right)^2, \quad \text{also} \quad \sin \alpha = \frac{dy}{ds}.$$

Folglich ist

$$c = -g \cdot \frac{dy}{ds}.$$

Nach § 58 (V) ist nun $d(v^2) = 2c\,ds$, also in unserem Falle:

$$d(v^2) = -2g \cdot \frac{dy}{ds} ds = -2g\,dy,$$

also erhalten wir durch Integration:

$$v^2 = -2gy + C.$$

Digitized by Google

Nun soll $v = 0$ sein für $y = h$, also muß $C = 2gh$ sein. Also ist $v^2 = 2g(h - y)$ und endlich:

$$v = \sqrt{2g(h-y)}. \tag{1}$$

Diese Gleichung lehrt, daß v nicht von der Beschaffenheit der Kurve, sondern einzig von der Höhe $h - y$ abhängt. Wir haben also den für die Mechanik wichtigen Satz gewonnen: Ein Punkt erlangt dieselbe Geschwindigkeit, wenn er auf irgendeiner Kurve hinabrollt oder wenn er die gleiche Höhe frei durchfällt.

6. Welche Zeit gebraucht der materielle Punkt, um unter den Bedingungen der vorigen Aufgabe von A nach B zu gelangen?

Lösung: Nach § 57 (II) ist die Geschwindigkeit $v = \frac{ds}{dt}$. Rechnen wir den Bogen s von der Y-Achse aus, so wird er bei der Bewegung des Punktes kleiner, also setzen wir in unserem Falle $v = -\frac{ds}{dt}$. Nun ist

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = dy\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2},$$

also ist

$$v = -\frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy}{dt}, \quad \text{also} \quad dt = -\frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy}{v}.$$

Ersetzen wir hierin v durch den in der vorigen Aufgabe, Gleichung (1), ermittelten Wert, so ist:

$$dt = -\sqrt{\frac{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}{2g(h-y)}}\,dy,$$

mithin ist

$$t = -\int\sqrt{\frac{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}{2g(h-y)}}\,dy. \tag{1}$$

Diese Gleichung lehrt, daß die Zeit, welche der Punkt gebraucht, um von A nach B zu gelangen, nicht nur von

Digitized by Google

der durchlaufenen Höhendifferenz, sondern auch von der Natur der Kurve abhängt, auf welcher der Punkt rollt.

7. Wenn die in den Aufgaben (5) und (6) vorkommende Kurve eine Cykloide ist, nach welcher Zeit wird der materielle Punkt den tiefsten Punkt der Kurve erreicht haben?

Lösung: Wir haben in der allgemeinen Formel (1) der vorigen Aufgabe den speziellen Wert von $\frac{dx}{dy}$ für die Cykloide einzusetzen. Nach § 30 ist derselbe

$$\frac{dx}{dy} = \sqrt{\frac{y}{2r-y}}.$$

Dabei ist aber zu bedenken, daß in § 30 die Cykloide gegen das Koordinatensystem die in Fig. 26 gezeichnete Lage hatte, während wir jetzt die in Fig. 27 a. f. S. dargestellte Lage brauchen. Um von der ersten auf die zweite Figur zu kommen, drehen wir die erste um den Koordinatenanfang in ihrer Ebene nach rechts um 180°, verschieben alsdann die X-Achse parallel zu sich selbst um $2r$ nach unten und verschieben schließlich noch die Y-Achse parallel zu sich selbst um $r\pi$ nach links. Was hierbei aus den Abszissen wird, braucht uns nicht zu kümmern; statt y aber haben wir nun offenbar $2r - y$, statt $2r - y$ also y zu setzen. Mithin ist

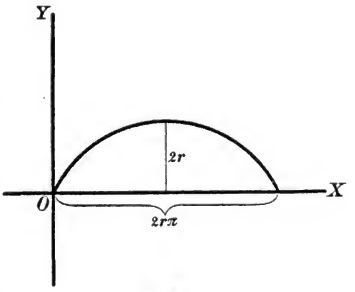


Fig. 26.

$$\frac{dx}{dy} = \sqrt{\frac{2r-y}{y}}$$

und

Digitized by Google

$$t = -\int \sqrt{\frac{1+\frac{2r-y}{y}}{2g(h-y)}}\, dy = -\int \sqrt{\frac{2r}{2gy(h-y)}}\, dy$$

$$= -\sqrt{\frac{r}{g}} \int \frac{dy}{\sqrt{hy-y^2}}.$$

Um dieses Integral auszuwerten, setzen wir identisch:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{hy-y^2}} = \int \frac{dy}{\sqrt{hy}\sqrt{1-\frac{y}{h}}}$$

und substituieren nun:

$$\frac{y}{h} = z^2, \quad \text{also} \quad y = hz^2, \; dy = 2hz\,dz, \; \sqrt{hy} = hz.$$

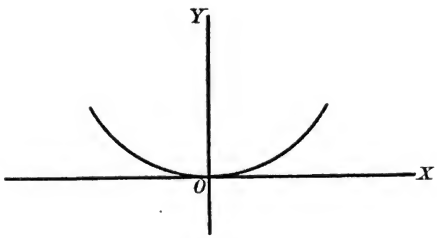


Fig. 27.

Dadurch erhalten wir:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{hy}\sqrt{1-\frac{y}{h}}} = \int \frac{2hz\,dz}{hz\sqrt{1-z^2}} = 2\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = -2 \arccos z + C$$

$$= -2 \arccos \sqrt{\frac{y}{h}} + C$$

nach Grundformel (12). Setzen wir diesen Wert oben ein, so ergibt sich:

$$t = 2\sqrt{\frac{r}{g}} \cdot \arccos \sqrt{\frac{y}{h}} + C.$$

Digitized by Google

Für $t = 0$ ist $y = h$, also $C = 0$, mithin:

$$t = 2\sqrt{\frac{r}{g}} \cdot \arccos\sqrt{\frac{y}{h}}. \tag{1}$$

Wenn der materielle Punkt an der tiefsten Stelle O angelangt ist, so ist $y = 0$; da $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$ ist, so erhalten wir für die von dem Punkte gebrauchte Zeit T den Wert:

$$T = \pi\sqrt{\frac{r}{g}}. \tag{2}$$

Da dieser Wert von h unabhängig ist, so haben wir den interessanten Satz gewonnen: „Wenn von verschiedenen Punkten der Cykloide gleichzeitig materielle Punkte ohne Anfangsgeschwindigkeit allein unter dem Einfluß der Schwere hinabrollen, so kommen sie alle zu gleicher Zeit im tiefsten Punkte an.“ Wegen dieser Eigenschaft wird die Cykloide als „tautochrone“ Kurve bezeichnet; für ein Cykloidenpendel gilt daher genau, was nach Aufgabe (3) für ein Kreispendel nur bei kleinen Ausschlagswinkeln annähernd Geltung hat.

Digitized by Google

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

DUE AUG 8 32

Digitized by Google

Math 3009.05.9
Die Anfangsgründe der Differential
Cabot Science
003289335
3 2044 091 888 982